

4. 高精度測位のための開発技術

4.1 マルチパス誤差低減処理

マルチパスの検出処理内容を以下に示す。

(1) 機能

マルチパス誤差が含まれた GPS 衛星を検出する。

(2) アルゴリズム

一般に障害物によって反射・回折された GPS 信号（劣化信号）は、直接波と比較して信号強度が低くなる傾向を持つ。この特徴を利用して劣化信号を特定し除去する。

具体的なアルゴリズムは、

$SS_{oba}(t)$: 移動局側で受信した衛星信号の信号強度の観測値

$EV_{oba}(t)$: 移動局側で受信した衛星の仰角の計算値

$SS_{ref}(\theta)$: 信号強度を衛星仰角 θ の変数として表した関数
とすると、

$$SS_{DIFF}(t) = SS_{ref}(EV_{oba}(t)) - SS_{oba}(t) \quad (4.1-1)$$

と表すことができる。

受信している各衛星に対して、1 エポック（1 回のデータ取得）毎に、式(4.1-1) より $SS_{DIFF}(t)$ を計算し、その値があらかじめ定めた閾値よりも大きい場合は、その衛星の信号は劣化信号と判断して測位計算から除外する。劣化信号除去手法処理部の処理フローを図 4.1-1 に示す

ステップ 1: 別の処理部から、信号強度・衛星仰角データ・衛星使用フラグを読み込む。

ステップ 2: 読み込んだ仰角データから $SS_{ref}(EV_{oba}(t))$ の値を計算する。

ステップ 3: $SS_{DIFF}(t)$ の値を計算する。

ステップ 4: $SS_{DIFF}(t)$ と設定した閾値とを比較し、閾値以上であれば衛星使用フラグを変更し、測位計算に使用する衛星から取り除く。

ステップ 5: 衛星使用フラグを測位計算ルーチンに渡す。

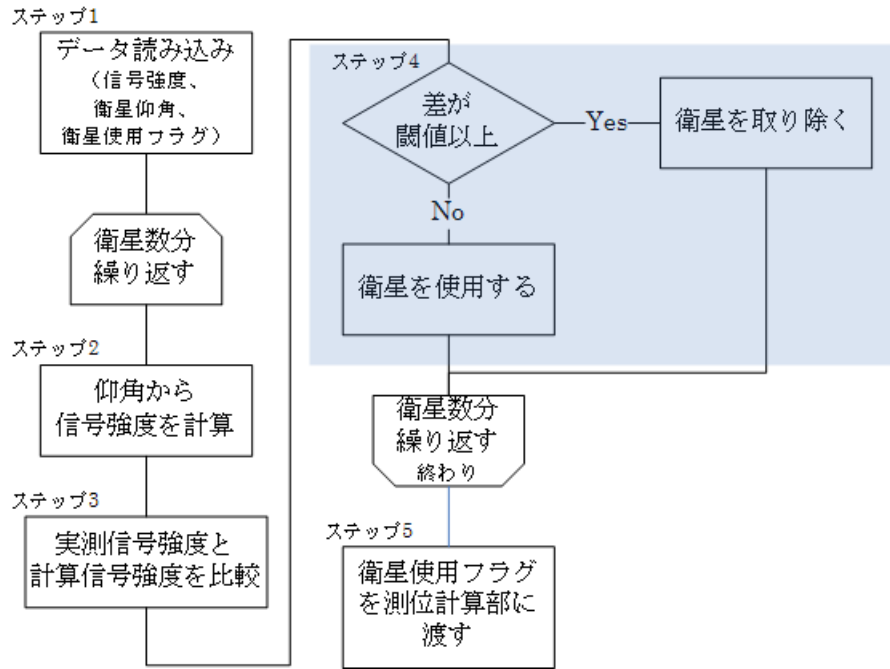


図 4.1-1 マルチパスデータ除去フロー

劣化信号除去手法処理部の外部インターフェースを表 4.1-1 に示す。

表 4.1-1 外部インターフェース

区分	項目	内容
入力	信号強度	受信機が出力する信号強度
入力	衛星仰角	衛星位置とアンテナ位置から計算することが出来る。
入力	衛星使用フラグ	劣化信号除去により衛星信号を除去するかのフラグ
出力	衛星使用フラグ	劣化信号除去により衛星信号を除去するかのフラグ

4.2 RTK-GPS 高速初期化処理

4.2.1 処理フロー

RTK-GPS 高速初期化技術の処理内容について説明する。高速初期化のための技術を機能とアルゴリズムについて以下に説明する。

RTK-GPS の処理フローを図 4.2.1-1 に示す。

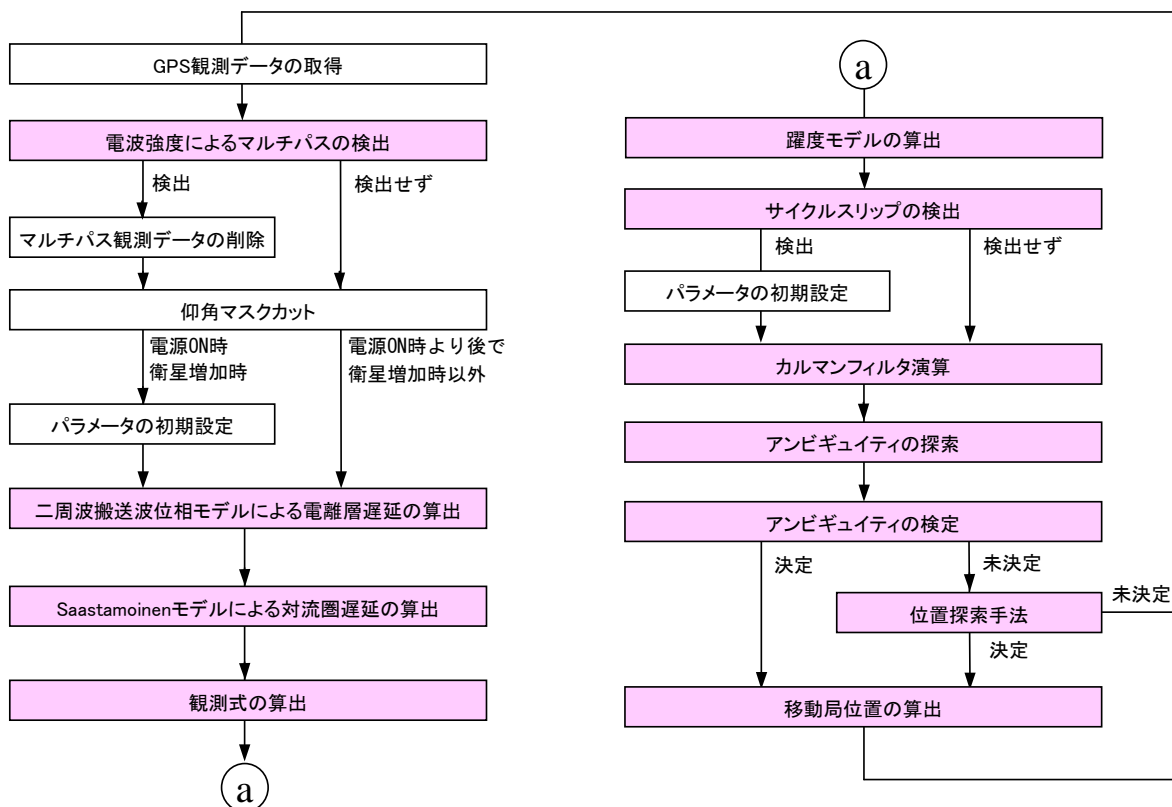


図 4.2.1-1 RTK-GPS 処理フロー

4.2.2 二周波搬送波位相モデルによる電離層遅延の算出

二周波搬送波位相モデルの算出内容を以下に示す。

(1) 機能

電離層遅延誤差をカルマンフィルタで推定するために、二周波搬送波位相モデルを構築する。

(2) アルゴリズム

電離層モデルの算出値は予測値であるため、実際と異なってしまうと、アンビギュイテ

ィに誤差が常に残留してしまい、アンビギュイティを決定することができない。そこで、観測データをもとに電離層遅延量を算出するモデルを考え、電離層遅延推定量を真値に収束させ、アンビギュイティを高速に決定できるようにする。

電離層遅延を算出できる観測データとして擬似距離と搬送波位相がある。擬似距離は 0.5m 程度の受信機雑音を含んでいるとされており、これを用いて計算すると、式(4.2.2-1)に示すように、電離層遅延量に約 1m の雑音 $\varepsilon_{\rho,l}$ が含まれてしまう。ここで、 f_1 及び f_2 は L1 帯及び L2 帯搬送波の周波数、 $\varepsilon_{\rho,r}$ は擬似距離の受信機雑音である。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho,l} &= \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \sqrt{\varepsilon_{\rho,r}^2 + \varepsilon_{\rho,r}^2} \\ &= \frac{(120 \times 1.023 \times 10^7)^2}{(154 \times 1.023 \times 10^7)^2 - (120 \times 1.023 \times 10^7)^2} \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} \\ &\cong 1.09\end{aligned}\tag{4.2.2-1}$$

一方、搬送波位相の受信機雑音は 0.002m 程度とされているため、これを用いて計算しても、式(4.2.2-2)に示すように、電離層遅延量に 0.004m 程度の雑音しか含まれない。ここで、 $\varepsilon_{\phi,r}$ は擬似距離の受信機雑音である。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho,l} &= \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \sqrt{\varepsilon_{\phi,r}^2 + \varepsilon_{\phi,r}^2} \\ &= \frac{(120 \times 1.023 \times 10^7)^2}{(154 \times 1.023 \times 10^7)^2 - (120 \times 1.023 \times 10^7)^2} \sqrt{0.002^2 + 0.002^2} \\ &\cong 0.004\end{aligned}\tag{4.2.2-2}$$

以上の理由から、受信機雑音が小さい搬送波位相を用いて、電離層遅延を求めることにする。

L1 帯及び L2 帯搬送波位相は式(4.2.2-3)及び式(4.2.2-4)で表される。ここで、 k はエポック、 λ_i は Li 帯 ($i=1,2$) 搬送波の波長、 $\varphi_{Li ku}^{1q}$ は二重位相差、 r_{ku}^{1q} は衛星と受信機間の距離の二重差、 δr_{ku}^{1q} は擬似距離方向の衛星位置誤差の二重差、 $I_{Li ku}^{1q}$ は Li 帯搬送波の電離層遅延二重差、 T_{ku}^{1q} は対流圏遅延二重差、 $N_{Li ku}^{1q}$ は衛星番号 1 と q の Li 帯搬送波二重位相差のアンビギュイティ、 $\varepsilon_{\phi_{Li ku}}^{1q}$ は Li 帯搬送波位相の観測雑音、 q は衛星番号である。

$$\lambda_1 \varphi_{L1 ku}^{1q}(k) = r_{ku}^{1q}(k) + \delta r_{ku}^{1q}(k) - I_{L1 ku}^{1q}(k) + T_{ku}^{1q}(k) + \lambda_1 N_{L1 ku}^{1q}(k) + \lambda_1 \varepsilon_{\phi_{L1 ku}}^{1q}(k)$$

(4. 2. 2-3)

$$\lambda_2 \phi_{L2ku}^{1q}(k) = r_{ku}^{1q}(k) + \delta r_{ku}^{1q}(k) - I_{L2ku}^{1q}(k) + T_{ku}^{1q}(k) + \lambda_2 N_{L2ku}^{1q}(k) + \lambda_2 \varepsilon_{\phi_{L2ku}}^{1q}(k)$$

(4. 2. 2-4)

式(4. 2. 2-3)と式(4. 2. 2-4)を引き算することにより、式(4. 2. 2-5)及び式(4. 2. 2-6)を得ることができる。

$$\lambda_1 \phi_{L1ku}^{1q}(k) - \lambda_2 \phi_{L2ku}^{1q}(k) = -I_{L1ku}^{1q}(k) + I_{L2ku}^{1q}(k) + \lambda_1 N_{L1ku}^{1q}(k) - \lambda_2 N_{L2ku}^{1q}(k) + \varepsilon_{ku}^{1q}(k)$$

(4. 2. 2-5)

$$\varepsilon_{ku}^{1q}(k) = \lambda_1 \varepsilon_{\phi_{L1ku}}^{1q}(k) - \lambda_2 \varepsilon_{\phi_{L2ku}}^{1q}(k)$$

(4. 2. 2-6)

一方、 Li 帯搬送波の電離層遅延 I_{Li} は式(4. 2. 2-7)で表される。ここで、 TEC は総電子数である。

$$I_{Li} = \frac{40.3 \cdot TEC}{f_i^2}$$

(4. 2. 2-7)

式(4. 2. 2-5)及び式(4. 2. 2-7)により、L1 帯搬送波の電離層遅延二重差は式(4. 2. 2-8)のように表される。

$$I_{L1ku}^{1q}(k) = \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (\lambda_1 \phi_{L1ku}^{1q}(k) - \lambda_2 \phi_{L2ku}^{1q}(k) - \lambda_1 N_{L1ku}^{1q}(k) + \lambda_2 N_{L2ku}^{1q}(k))$$

(4. 2. 2-8)

L1 帯搬送波の電離層遅延二重差の観測量は推定の前に求める必要があるため、アンビギュイティ実数解の一段予測量を用いることにする。以上のこと及び式(4. 2. 2-8)をもとに、L1 帯搬送波の電離層遅延二重差の観測量 I_{L1ku}^{1q} を式(4. 2. 2-9)のように表すことにする。ここで、 $N_{Liku}^{1q}(k|k-1)$ は二重位相差のアンビギュイティ実数解の一段予測量である。

$$I_{L1ku}^{1q}(k) = \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (\lambda_1 \phi_{L1ku}^{1q}(k) - \lambda_2 \phi_{L2ku}^{1q}(k) - \lambda_1 N_{L1ku}^{1q}(k|k-1) + \lambda_2 N_{L2ku}^{1q}(k|k-1))$$

(4. 2. 2-9)

式(4. 2. 2-9)を用いて、電離層遅延二重差を求めるモデルを二周波搬送波位相モデルを構築する。

4. 2. 3 Saastamoinen モデルによる対流圏遅延の算出

Saastamoinen モデルの算出内容を以下に示す。

(1) 機能

対流圏遅延誤差をカルマンフィルタで推定するために、Saastamoinen モデルを構築する。

(2) アルゴリズム

SaastamoinenモデルはGPSの観測点における温度、気圧、湿度を与えて対流圏遅延を計算するモデル式である。そこで、対流圏遅延量は、

$$T_{trop} = \frac{2.277 \times 10^{-3} \left\{ P + \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) e - \tan 2\lambda \right\}}{\cos \lambda} \quad (4.2.3-1)$$

となる。ただし、

λ : 衛星の天頂角 [rad]

P : 気圧 [hPa]

T : 気温 ($K^\circ = C^\circ + 273.15$) [K]

e : 水蒸気分圧 [hPa]

である。ここで、水蒸気分圧 e は、相対湿度 RH [%] から

$$e = 6.108(RH/100) \exp \left\{ \frac{(17.15T - 4684)}{T - 38.45} \right\}$$

で求める。

4.2.4 躍度モデルの算出

カルマンフィルタで位置を推定するための状態方程式のモデル式として躍度モデルを適用する。以下に算出内容を示す。

(1) 機能

躍度モデルを組み込んだカルマンフィルタの状態方程式の算出を行う。

(2) アルゴリズム

カルマンフィルタにおける予測精度を向上させるため、躍度が一次マルコフ過程であると仮定した運動モデル（躍度モデル）を考える。このとき、躍度 $\gamma(t)$ は式(4.2.4-1)のように表される。ここで、 α は躍度の時定数の逆数である。

$$\dot{\gamma}(t) = -\alpha\gamma(t) + w(t) \quad (4.2.4-1)$$

連続型状態方程式は式(4.2.4-2)～式(4.2.4-8)で表される。ここで、雑音 $w(t)$ は平均0、分散 I の標準正規分布に従うものとし、 $r(t) \in R^3$ は移動局位置、 $v(t) \in R^3$ は移動局速度、 $a(t) \in R^3$ は移動局加速度、 $\gamma(t) \in R^3$ は移動局躍度、 m は衛星数、 σ_w はシステム雑音の標準偏差、 $\sigma_{N_{Li}}$ は Li 帯搬送波二重位相差のアンビギュイティの標準偏差、 $\sigma_{I_{Li}}$ は電離層遅延二重差の標準偏差、 σ_T は対流圏遅延二重差の標準偏差、 $N_{Liku}^{1q}(t)$ は Li 帯 ($i=1,2$) 搬送波二重位相差のアンビギュイティ、 $I_{Liku}^{1q}(t)$ は $L1$ 帯搬送波の電離層遅延二重差、 $T_{ku}^{1q}(t)$ は対流圏遅延二重差、 q は衛星番号、 m は衛星数である。

$$\dot{\eta}(t) = F\eta(t) + Gw(t) \quad (4.2.4-2)$$

$$\begin{aligned}\eta(t) &\equiv \begin{bmatrix} r^T(t) & v^T(t) & a^T(t) & \gamma^T(t) & N_{L1}^T(t) & N_{L2}^T(t) & I_{L1}^T(t) & T^T(t) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \xi^T(t) & N^T(t) & I_{L1}^T(t) & T^T(t) \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (4.2.4-3)$$

$$F = \begin{bmatrix} O & I & O & O & O & O & O & O \\ O & O & I & O & O & O & O & O \\ O & O & O & I & O & O & O & O \\ O & O & O & -\alpha I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \end{bmatrix}\quad (4.2.4-4)$$

$$G = \begin{bmatrix} O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & \sigma_w I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \sigma_{N_{L1}} I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \sigma_{N_{L2}} I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \sigma_{I_{L1}} I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \sigma_T I \end{bmatrix}\quad (4.2.4-5)$$

$$N_{Li}(t) = \begin{bmatrix} N_{Liku}^{12}(t) & N_{Liku}^{13}(t) & \cdots & N_{Liku}^{1m}(t) \end{bmatrix}^T\quad (4.2.4-6)$$

$$I_{L1}(t) = \begin{bmatrix} I_{L1ku}^{12}(t) & I_{L1ku}^{13}(t) & \cdots & I_{L1ku}^{1m}(t) \end{bmatrix}^T\quad (4.2.4-7)$$

$$T(t) = \begin{bmatrix} T_{ku}^{12}(t) & T_{L1ku}^{13}(t) & \cdots & T_{ku}^{1m}(t) \end{bmatrix}^T\quad (4.2.4-8)$$

躍度 $\gamma(k)$ に関する相関関数の代表的なモデルは式(4.2.4-9)で表される。ここで、 σ_γ^2 は躍度の分散である。

$$r(\tau) = E[\gamma(t)\gamma(t+\tau)] = \sigma_\gamma^2 e^{-\alpha|\tau|}\quad (4.2.4-9)$$

図4.2.4-1のように躍度の確率分布を設定する。図4.2.4-1において $P_\gamma(\gamma)$ は躍度の確率、 Γ_{\max} は躍度の最大値である。図4.2.4-1に示す躍度の確率分布は、加速度が一次マルコフ過程である Singer モデルの加速度の確率分布を参考にして、離散分布と連続分布を取り入れたものである。躍度の分散を求めると、式(4.2.4-10)のように表される。

$$\begin{aligned}
\sigma_\gamma^2 &= P_{\max} \Gamma_{\max}^2 + P_{\max} (-\Gamma_{\max}^2) + 2 \int_0^{\Gamma_{\max}} \frac{1 - (P_0 + 2P_{\max})}{2\Gamma_{\max}} \gamma^2 d\gamma \\
&= \frac{\Gamma_{\max}^2}{3} (1 + 4P_{\max} - P_0)
\end{aligned} \tag{4.2.4-10}$$

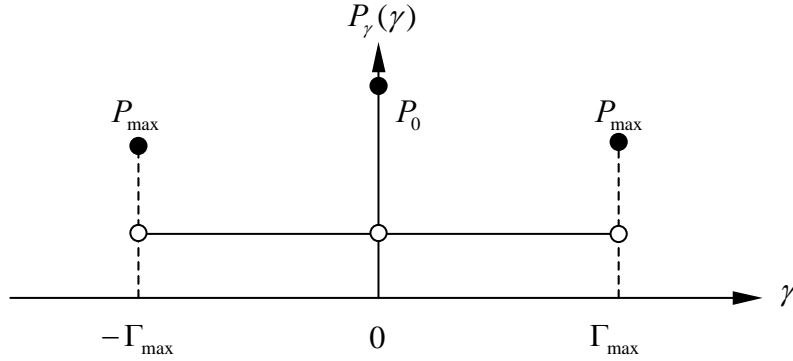


図 4.2.4-1 躍度の確率分布

式(4.2.4-9)の相関関数 $r(\tau)$ をフーリエ変換すると、式(4.2.4-11)のように展開できる。

$$\begin{aligned}
R(\omega) &= \mathfrak{F}\{r(\tau)\} \\
&= \mathfrak{F}\{\sigma_a^2 e^{-\alpha|\tau|}\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\gamma^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^0 \sigma_\gamma^2 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} \sigma_\gamma^2 e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \sigma_\gamma^2 \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau'} e^{j\omega\tau'} (-1) d\tau' + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \\
&= \sigma_\gamma^2 \left\{ \int_0^{\infty} e^{(j\omega-\alpha)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+\alpha)\tau} d\tau \right\} \\
&= \sigma_\gamma^2 \left\{ \frac{-1}{-\alpha + j\omega} + \frac{-1}{-(\alpha + j\omega)} \right\} \\
&= \frac{2\alpha\sigma_\gamma^2}{\alpha^2 + \omega^2} \\
&= \frac{1}{j\omega + \alpha} \cdot \frac{1}{-j\omega + \alpha} \cdot 2\alpha\sigma_\gamma^2 \\
&= H(j\omega)H(-j\omega)S(\omega)
\end{aligned} \tag{4.2.4-11}$$

ここで、 $H(j\omega)$ 、 $S(\omega)$ は式(4.2.4-12)及び式(4.2.4-13)のように表される。

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha} \tag{4.2.4-12}$$

$$S(\omega) = 2\alpha\sigma_\gamma^2 \tag{4.2.4-13}$$

システム雑音の分散 σ_w^2 を用いて、式(4.2.4-14)を得ることができる。

$$\sigma_w^2 = 2\alpha\sigma_\gamma^2 \quad (4.2.4-14)$$

式(4.2.4-2)の解 $\eta(t)$ に対して、関数 $e^{-Ft}\eta(t)$ を考え、伊藤の連鎖則を適用すると、式(4.2.4-15)を得ることができる。ここで、 $\Phi(t, \alpha)$ は状態遷移行列、 $u(t)$ はシステム雑音である。

$$\eta(t) = e^{Ft}\eta_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gw(\tau)d\tau \quad (4.2.4-15)$$

$$\Phi(t, \alpha) = e^{Ft} \quad (4.2.4-16)$$

$$u(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gw(\tau)d\tau \quad (4.2.4-17)$$

共分散関数を計算すると、式(4.2.4-18)のようになる。

$$\begin{aligned} \text{var}[\eta(t)] &= \left(\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gw(\tau)d\tau \right) \left(\int_0^t w^T(t)G^T e^{F^T(t-\tau)} dt \right) \\ &= \int_0^t e^{F(t-\tau)}GQ_wG^T e^{F^T(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (4.2.4-18)$$

ここで、 Q_w は式(4.2.4-19)で表される。

$$\begin{aligned} Q_w &= E[w(\tau)w^T(k)] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \delta(\tau - k) \end{aligned} \quad (4.2.4-19)$$

式(4.2.4-20)に示すように、逆ラプラス変換を用いて、状態遷移行列 $\Phi(t, \alpha)$ を求めていく。

$$\begin{aligned} \Phi(t, \alpha) &= e^{Ft} \\ &= L^{-1}\{(sI - F)^{-1}\} \end{aligned} \quad (4.2.4-20)$$

$(sI - F)$ の逆行列を計算するために、式(4.2.4-21)及び式(4.2.4-22)に示すように、 $(sI - F)$ の固有値を求める。

$$\det(\lambda I - F) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I & -I & O & O & O & O & O & O \\ O & \lambda I & -I & O & O & O & O & O \\ O & O & \lambda I & -I & O & O & O & O \\ O & O & O & \lambda I + \alpha I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \lambda I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \lambda I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \lambda I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \lambda I \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.4-21)$$

$$\lambda^7(\lambda + \alpha) = 0$$

$$\lambda = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\alpha\} \quad (4.2.4-22)$$

固有値及び余因子行列を用いて、式(4.2.4-23)に示すように、 $(sI - F)$ の逆行列を求めていく。

$$(sI - F)^{-1} = \frac{1}{s^4(s + \alpha)} \begin{bmatrix} s^3(s + \alpha)I & s^2(s + \alpha)I & s(s + \alpha)I & sI & O & O & O & O \\ O & s^3(s + \alpha)I & s^2(s + \alpha)I & s^2I & O & O & O & O \\ O & O & s^3(s + \alpha)I & s^3I & O & O & O & O \\ O & O & O & s^3I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & s^3(s + \alpha)I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & s^3(s + \alpha)I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & s^3(s + \alpha)I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & s^3(s + \alpha)I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s}I & \frac{1}{s^2}I & \frac{1}{s^3}I & \frac{1}{s^3(s + \alpha)}I & O & O & O & O \\ O & \frac{1}{s}I & \frac{1}{s^2}I & \frac{1}{s^2(s + \alpha)}I & O & O & O & O \\ O & O & \frac{1}{s}I & \frac{1}{s(s + \alpha)}I & O & O & O & O \\ O & O & O & \frac{1}{s + \alpha}I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \frac{1}{s}I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \frac{1}{s}I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \frac{1}{s}I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \frac{1}{s}I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s}I & \frac{1}{s^2}I & \frac{1}{s^3}I & \left\{ \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{s^3} - \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{s+\alpha} \right\} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s}I & \frac{1}{s^2}I & \left\{ -\frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{s} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{s+\alpha} \right\} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s}I & \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{s+\alpha} \right\} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+\alpha} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s}I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s}I \end{bmatrix} \quad (4.2.4-23)$$

式(4.2.4-23)を逆ラプラス変換し、観測データのサンプリング間隔を Δt とし、離散化すると、状態遷移行列 $\Phi(t, \alpha)$ は式(4.2.4-24)のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta t, \alpha) &= e^{Ft} \\ &= L^{-1} \left\{ (sI - F)^{-1} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} I & \Delta t I & \frac{1}{2} \Delta t^2 I & \frac{1}{\alpha^3} \left(1 - \alpha \Delta t + \frac{\alpha^2}{2} \Delta t^2 - e^{-\alpha \Delta t} \right) I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \Delta t I & \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha \Delta t + e^{-\alpha \Delta t}) I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \Delta t}) I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha \Delta t} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.4-24)$$

式(4.2.4-17)をもとにシステム雑音 $u(k)$ は式(4.2.4-25)のように展開できる。但し、離散型で表現した。

$$\begin{aligned}
u(k) &= \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{F((k+1)\Delta t-t, \alpha)} Gw(t) dt \\
&= \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \begin{bmatrix} I & \{(k+1)\Delta t-t\}I & \frac{1}{2}\{(k+1)\Delta t-t\}^2 I & \frac{1}{\alpha^3} \left[1 - \alpha\{(k+1)\Delta t-t\} + \frac{\alpha^2}{2}\{(k+1)\Delta t-t\}^2 - e^{-\alpha\{(k+1)\Delta t-t\}} \right] I & O & O & O & O \\ O & I & \{(k+1)\Delta t-t\}I & \frac{1}{\alpha^2} \left[-1 + \alpha\{(k+1)\Delta t-t\} + e^{-\alpha\{(k+1)\Delta t-t\}} \right] I & O & O & O & O \\ O & O & I & \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha\{(k+1)\Delta t-t\}} \right) I & O & O & O & O \\ O & O & O & e^{-\alpha\{(k+1)\Delta t-t\}} I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O & I \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & \sigma_w I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \sigma_{N_{E1}} I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \sigma_{N_{E2}} I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \sigma_{I_{L1}} I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \sigma_T I \end{bmatrix} w(t) dt \\
&= \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \begin{bmatrix} O & O & O & \frac{\sigma_w}{\alpha^3} \left[1 - \alpha\{(k+1)\Delta t-t\} + \frac{\alpha^2}{2}\{(k+1)\Delta t-t\}^2 - e^{-\alpha\{(k+1)\Delta t-t\}} \right] & O & O & O & O \\ O & O & O & \frac{\sigma_w}{\alpha^2} \left[-1 + \alpha\{(k+1)\Delta t-t\} + e^{-\alpha\{(k+1)\Delta t-t\}} \right] I & O & O & O & O \\ O & O & O & \frac{\sigma_w}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha\{(k+1)\Delta t-t\}} \right) I & O & O & O & O \\ O & O & O & \sigma_w e^{-\alpha\{(k+1)\Delta t-t\}} I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \sigma_{N_{E1}} I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \sigma_{N_{E2}} I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \sigma_{I_{L1}} I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \sigma_T I \end{bmatrix} w(t) dt \\
\end{aligned} \tag{4.2.4-25}$$

式(4.2.4-25)をもとにシステム雑音 $u(k)$ の共分散行列 $Q(k)$ を式(4.2.4-26)～式(4.2.4-30)のように展開できる。

$$\begin{aligned}
Q(k) &= E[u(k)u^T(k)] \\
&= \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \begin{bmatrix} O & O & O & \sigma_w a I & O & O & O & O \\ O & O & O & \sigma_w b I & O & O & O & O \\ O & O & O & \sigma_w c I & O & O & O & O \\ O & O & O & \sigma_w d I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \sigma_{N_{L1}} I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \sigma_{N_{L2}} I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \sigma_{I_{L1}} I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \sigma_T I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & I \end{bmatrix} \\
&= \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \begin{bmatrix} O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ \sigma_w a I & \sigma_w b I & \sigma_w c I & \sigma_w d I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \sigma_{N_{L1}} I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \sigma_{N_{L2}} I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \sigma_{I_{L1}} I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \sigma_T I \end{bmatrix} dt \\
&= \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \begin{bmatrix} \sigma_w^2 a^2 I & \sigma_w^2 a b I & \sigma_w^2 a c I & \sigma_w^2 a d I & O & O & O & O \\ \sigma_w^2 a b I & \sigma_w^2 b^2 I & \sigma_w^2 b c I & \sigma_w^2 b d I & O & O & O & O \\ \sigma_w^2 a c I & \sigma_w^2 b c I & \sigma_w^2 c^2 I & \sigma_w^2 c d I & O & O & O & O \\ \sigma_w^2 a d I & \sigma_w^2 b d I & \sigma_w^2 c d I & \sigma_w^2 d^2 I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \sigma_{N_{L1}}^2 I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \sigma_{N_{L2}}^2 I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \sigma_{I_{L1}}^2 I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \sigma_T^2 I \end{bmatrix} dt
\end{aligned}
\tag{4.2.4-26}$$

$$a = \frac{1}{\alpha^3} \left[1 - \alpha \{(k+1)\Delta t - t\} + \frac{\alpha^2}{2} \{(k+1)\Delta t - t\}^2 - e^{-\alpha \{(k+1)\Delta t - t\}} \right] \tag{4.2.4-27}$$

$$b = \frac{1}{\alpha^2} \left[-1 + \alpha \{(k+1)\Delta t - t\} + e^{-\alpha \{(k+1)\Delta t - t\}} \right] \tag{4.2.4-28}$$

$$c = \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha \{(k+1)\Delta t - t\}} \right) \tag{4.2.4-29}$$

$$d = e^{-\alpha \{(k+1)\Delta t - t\}} \tag{4.2.4-30}$$

$Z = (k+1)\Delta t - t$ とおくと、式(4.2.4-26)を式(4.2.4-31)～式(4.2.4-41)のように展開できる。

$$\begin{aligned}
Q(k) &= \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \begin{bmatrix} \sigma_w^2 a^2 I & \sigma_w^2 abI & \sigma_w^2 acI & \sigma_w^2 adI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 abI & \sigma_w^2 b^2 I & \sigma_w^2 bcI & \sigma_w^2 bdI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 acI & \sigma_w^2 bcI & \sigma_w^2 c^2 I & \sigma_w^2 cdI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 adI & \sigma_w^2 bdI & \sigma_w^2 cdI & \sigma_w^2 d^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{N_{L1}}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{N_{L2}}^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{I_{L1}}^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_T^2 I \end{bmatrix} dt \\
&= \int_{\Delta t}^0 \begin{bmatrix} \sigma_w^2 a^2 I & \sigma_w^2 abI & \sigma_w^2 acI & \sigma_w^2 adI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 abI & \sigma_w^2 b^2 I & \sigma_w^2 bcI & \sigma_w^2 bdI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 acI & \sigma_w^2 bcI & \sigma_w^2 c^2 I & \sigma_w^2 cdI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 adI & \sigma_w^2 bdI & \sigma_w^2 cdI & \sigma_w^2 d^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{N_{L1}}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{N_{L2}}^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{I_{L1}}^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_T^2 I \end{bmatrix} d(-Z) \\
&= \int_0^{\Delta t} \begin{bmatrix} \sigma_w^2 a^2 I & \sigma_w^2 abI & \sigma_w^2 acI & \sigma_w^2 adI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 abI & \sigma_w^2 b^2 I & \sigma_w^2 bcI & \sigma_w^2 bdI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 acI & \sigma_w^2 bcI & \sigma_w^2 c^2 I & \sigma_w^2 cdI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_w^2 adI & \sigma_w^2 bdI & \sigma_w^2 cdI & \sigma_w^2 d^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{N_{L1}}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{N_{L2}}^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{I_{L1}}^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_T^2 I \end{bmatrix} dZ
\end{aligned}$$

(4.2.4-31)

$$\begin{aligned}
a^2 &= \left\{ \frac{1}{\alpha^3} \left(1 - \alpha Z + \frac{\alpha^2}{2} Z^2 - e^{-\alpha Z} \right) \right\}^2 \\
&= \frac{1}{\alpha^6} \left(1 - 2\alpha Z + 2\alpha^2 Z^2 - \alpha^3 Z^3 + \frac{\alpha^4}{4} Z^4 - 2e^{-\alpha Z} + 2\alpha Z e^{-\alpha Z} - \alpha^2 Z^2 e^{-\alpha Z} + e^{-2\alpha Z} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.4-32}$$

$$\begin{aligned}
b^2 &= \left\{ \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha Z + e^{-\alpha Z}) \right\}^2 \\
&= \frac{1}{\alpha^4} (1 - 2\alpha Z + \alpha^2 Z^2 - 2e^{-\alpha Z} + 2\alpha Z e^{-\alpha Z} + e^{-2\alpha Z})
\end{aligned} \tag{4.2.4-33}$$

$$\begin{aligned}
c^2 &= \left\{ \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha Z}) \right\}^2 \\
&= \frac{1}{\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha Z} + e^{-2\alpha Z})
\end{aligned} \tag{4.2.4-34}$$

$$\begin{aligned}
d^2 &= (e^{-\alpha Z})^2 \\
&= e^{-2\alpha Z}
\end{aligned} \tag{4.2.4-35}$$

$$\begin{aligned}
ab &= \left\{ \frac{1}{\alpha^3} \left(1 - \alpha Z + \frac{\alpha^2}{2} Z^2 - e^{-\alpha Z} \right) \right\} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha Z + e^{-\alpha Z}) \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha^5} \left(-1 + 2\alpha Z - \frac{3}{2} \alpha^2 Z^2 + \frac{\alpha^3}{2} Z^3 + 2e^{-\alpha Z} - 2\alpha Z e^{-\alpha Z} + \frac{\alpha^2}{2} Z^2 e^{-\alpha Z} - e^{-2\alpha Z} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.4-36}$$

$$\begin{aligned}
ac &= \left\{ \frac{1}{\alpha^3} \left(1 - \alpha Z + \frac{\alpha^2}{2} Z^2 - e^{-\alpha Z} \right) \right\} \left\{ \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha Z}) \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha^4} \left(1 - \alpha Z + \frac{\alpha^2}{2} Z^2 - 2e^{-\alpha Z} + \alpha Z e^{-\alpha Z} - \frac{\alpha^2}{2} Z^2 e^{-\alpha Z} + e^{-2\alpha Z} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.4-37}$$

$$\begin{aligned}
ad &= \left\{ \frac{1}{\alpha^3} \left(1 - \alpha Z + \frac{\alpha^2}{2} Z^2 - e^{-\alpha Z} \right) \right\} e^{-\alpha Z} \\
&= \frac{1}{\alpha^3} \left(e^{-\alpha Z} - \alpha Z e^{-\alpha Z} + \frac{\alpha^2}{2} Z^2 e^{-\alpha Z} - e^{-2\alpha Z} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.4-38}$$

$$\begin{aligned}
bc &= \left\{ \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha Z + e^{-\alpha Z}) \right\} \left\{ \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha Z}) \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha^3} (-1 + \alpha Z + 2e^{-\alpha Z} - \alpha Z e^{-\alpha Z} - e^{-2\alpha Z})
\end{aligned} \tag{4.2.4-39}$$

$$\begin{aligned}
bd &= \left\{ \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha Z + e^{-\alpha Z}) \right\} e^{-\alpha Z} \\
&= \frac{1}{\alpha^2} (-e^{-\alpha Z} + \alpha Z e^{-\alpha Z} + e^{-2\alpha Z})
\end{aligned} \tag{4.2.4-40}$$

$$\begin{aligned}
cd &= \left\{ \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha Z}) \right\} e^{-\alpha Z} \\
&= \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha Z} - e^{-2\alpha Z})
\end{aligned} \tag{4.2.4-41}$$

式(4.2.4-31)を計算すると、式(4.2.4-42)～式(4.2.4-56)のようになる。

$$Q(t) = \begin{bmatrix} q_{11}I & q_{12}I & q_{13}I & q_{14}I & O & O & O & O \\ q_{21}I & q_{22}I & q_{23}I & q_{24}I & O & O & O & O \\ q_{31}I & q_{32}I & q_{33}I & q_{34}I & O & O & O & O \\ q_{41}I & q_{42}I & q_{43}I & q_{44}I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & q_{55}I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & q_{66}I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & q_{77}I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & q_{88}I \end{bmatrix} \tag{4.2.4-42}$$

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \frac{\sigma_w^2}{60\alpha^7} (-90 + 60\alpha\Delta t - 60\alpha^2\Delta t^2 + 40\alpha^3\Delta t^3 - 15\alpha^4\Delta t^4 \\
&\quad + 3\alpha^5\Delta t^5 + 120e^{-\alpha\Delta t} + 60\alpha^2\Delta t^2 e^{-\alpha\Delta t} - 30e^{-2\alpha\Delta t})
\end{aligned} \tag{4.2.4-43}$$

$$\begin{aligned}
q_{12} = q_{21} &= \frac{\sigma_w^2}{8\alpha^6} (4 - 8\alpha\Delta t + 8\alpha^2\Delta t^2 - 4\alpha^3\Delta t^3 + \alpha^4\Delta t^4 \\
&\quad - 8e^{-\alpha\Delta t} + 8\alpha\Delta t e^{-\alpha\Delta t} - 4\alpha^2\Delta t^2 e^{-\alpha\Delta t} + 4e^{-2\alpha\Delta t})
\end{aligned} \tag{4.2.4-44}$$

$$\begin{aligned}
q_{13} = q_{31} &= \frac{\sigma_w^2}{6\alpha^5} (-9 + 6\alpha\Delta t - 3\alpha^2\Delta t^2 + \alpha^3\Delta t^3 + 12e^{-\alpha\Delta t} + 3\alpha^2\Delta t^2 e^{-\alpha\Delta t} - 3e^{-2\alpha\Delta t})
\end{aligned} \tag{4.2.4-45}$$

$$q_{14} = q_{41} = \frac{\sigma_w^2}{2\alpha^4} (1 - 2e^{-\alpha\Delta t} - \alpha^2\Delta t^2 e^{-\alpha\Delta t} + e^{-2\alpha\Delta t}) \tag{4.2.4-46}$$

$$q_{22} = \frac{\sigma_w^2}{2\alpha^5} \left(1 + 2\alpha\Delta t - 2\alpha^2\Delta t^2 + \frac{2}{3}\alpha^3\Delta t^3 - 4\alpha\Delta t e^{-\alpha\Delta t} - e^{-2\alpha\Delta t} \right) \tag{4.2.4-47}$$

$$q_{23} = q_{32} = \frac{\sigma_w^2}{2\alpha^4} (1 - 2\alpha\Delta t + \alpha^2\Delta t^2 + 2\alpha\Delta t e^{-\alpha\Delta t} - 2e^{-\alpha\Delta t} + e^{-2\alpha\Delta t}) \tag{4.2.4-48}$$

$$q_{24} = q_{42} = \frac{\sigma_w^2}{2\alpha^3} (1 - 2\alpha\Delta t e^{-\alpha\Delta t} - e^{-2\alpha\Delta t}) \quad (4.2.4-49)$$

$$q_{33} = \frac{\sigma_w^2}{2\alpha^3} (-3 + 2\alpha\Delta t + 4e^{-\alpha\Delta t} - e^{-2\alpha\Delta t}) \quad (4.2.4-50)$$

$$q_{34} = q_{43} = \frac{\sigma_w^2}{2\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha\Delta t} + e^{-2\alpha\Delta t}) \quad (4.2.4-51)$$

$$q_{44} = \frac{\sigma_w^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \quad (4.2.4-52)$$

$$q_{55} = \sigma_{N_{L1}}^2 \Delta t \quad (4.2.4-53)$$

$$q_{66} = \sigma_{N_{L2}}^2 \Delta t \quad (4.2.4-54)$$

$$q_{77} = \sigma_{I_{L1}}^2 \Delta t \quad (4.2.4-55)$$

$$q_{88} = \sigma_I^2 \Delta t \quad (4.2.4-56)$$

4.2.5 イノベーションによるサイクルスリップの検出

カルマンフィルタのイノベーションを用いたサイクルスリップの検出手法を以下に示す。

(1) 機能

サイクルスリップの検出を行う。

(2) アルゴリズム

サイクルスリップ検出方法はカルマンフィルタのイノベーションを用いて χ^2 検定で検出を行う。

カルマンフィルタのイノベーション $v_\varphi(k)$ は共分散行列 $M_\varphi(k)$ の正規性白色過程である。したがって、コレスキー因子分解により、 $M_\varphi(k)$ に対して式(4.2.5-1)となるような正則な行列 $L(k)$ が存在する。

$$M_\varphi(k) = L(k)L^T(k) \quad (4.2.5-1)$$

式(4.2.5-2)に示すように $v_s(k)$ を定義すると、 $v_s(k)$ の共分散行列は式(4.2.5-3)のように単位行列になる。

$$v_s(k) \equiv L^{-1}(k)v_\varphi(k) \quad (4.2.5-2)$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[\mathbf{v}_s(k)] &= \text{Cov}[L^{-1}(k)\mathbf{v}_\phi(k)] \\
&= E[L^{-1}(k)\mathbf{v}_\phi(k)\mathbf{v}_\phi^T(k)L^T(k)] \\
&= L^{-1}(k)M_\phi(k)L(k) \\
&= I
\end{aligned} \tag{4.2.5-3}$$

式(4.2.5-3)より、 $\mathbf{v}_s(k)$ のそれぞれの要素は互いに独立な標準正規分布に従う。したがって、式(4.2.5-4)で表される検定統計量 $T(k)$ は自由度 $2m-2$ の χ^2 分布に従う。

$$\begin{aligned}
T(k) &= \mathbf{v}_s^T(k)\mathbf{v}_s(k) \\
&= \mathbf{v}_\phi^T(k)L^T(k)L^{-1}(k)\mathbf{v}_\phi(k) \\
&= \mathbf{v}_\phi^T(k)M^{-1}(k)\mathbf{v}_\phi(k)
\end{aligned} \tag{4.2.5-4}$$

もしサイクルスリップが起こると、イノベーションの共分散行列は変化する。そこで、下記に示す2つの仮説を立てる。

- ・ 仮説 $H_{\chi,0}$ ：イノベーションの共分散が変化しなかった。
- ・ 仮説 $H_{\chi,1}$ ：イノベーションの共分散が変化した。

そこで、危険率 α_χ を定め、この仮説に対する検定を自由度 $2m-2$ の χ^2 分布に基づいて行うと、以下のように仮説を採択できる。

- ・ $T(t) \leq \chi_{\alpha_\chi}^2(2m-2)$ の場合、仮説 $H_{\chi,0}$ を採択する。
- ・ $T(t) > \chi_{\alpha_\chi}^2(2m-2)$ の場合、仮説 $H_{\chi,1}$ を採択する。

4.2.6 観測方程式の算出

カルマンフィルタに適用する観測方程式の算出内容を以下に示す。

(1) 機能

GPS データから観測方程式の算出を行う。

(2) アルゴリズム

Li 帯搬送波二重位相差 $\phi_{Li ku}^{1q}(k)$ のベクトル $\phi_{Li}(k)$ 、擬似距離二重差 $\rho_{Li ku}^{1q}(k)$ のベクトル $\rho_{Li}(k)$ 、L1 帯搬送波の電離層遅延二重差 $I_{Li ku}^{1q}(k)$ のベクトル $I'_{Li}(k)$ 及び対流圏遅延二重差 $T_{ku}^{1q}(k)$ のベクトル $T'(k)$ を式(4.2.4-1)～式(4.2.4-9)のように離散型で表す。ここで、 c は光速、 (x_k, y_k, z_k) は基準局位置、 (x_u, y_u, z_u) は移動局位置、 (x^q, y^q, z^q) は衛星番号 q の衛星位置、 $\varepsilon_{\phi_{Li ku}}^{1q}(k)$ は $N(0, R_{\phi_{Li}})$ に従う二重位相差の観測雑音、 $\varepsilon_{\rho_{Li ku}}^{1q}(k)$ は $N(0, R_{\rho_{Li}})$ 及びに従う擬似距離二重差の観測雑音、 $\varepsilon_{I_{Li ku}}^{1q}(k)$ は $N(0, R_{I_{Li}})$ に従う電離層遅延二重差の観測雑音、 $\varepsilon_{T_{ku}}^{1q}(k)$ は $N(0, R_T)$ 及びに従う対流圏遅延二重差の観測雑音である。

$$\begin{bmatrix} \varphi_{L_1}(k) \\ \varphi_{L_2}(k) \\ \rho_{L_1}(k) \\ \rho_{L_2}(k) \\ I'_{L_1}(k) \\ T'_{L_1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{L_1}(r(k)) \\ h_{L_2}(r(k)) \\ h_{L_1}(r(k)) \\ h_{L_2}(r(k)) \\ O \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{L_1}(k) \\ N_{L_2}(k) \\ O \\ O \\ O \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} I_{L_1}(k) \\ -\frac{1}{\lambda_2} \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} I_{L_1}(k) \\ I_{L_1}(k) \\ \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} I_{L_1}(k) \\ I_{L_1}(k) \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} T(k) \\ \frac{1}{\lambda_2} T(k) \\ T(k) \\ T(k) \\ O \\ T(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{\varphi_{L_1}}(k) \\ \varepsilon_{\varphi_{L_2}}(k) \\ \varepsilon_{\rho_{L_1}}(k) \\ \varepsilon_{\rho_{L_2}}(k) \\ \varepsilon_{I_{L_1}}(k) \\ \varepsilon_T(k) \end{bmatrix} \quad (4.2.6-1)$$

$$\varphi_{L_i}(k) = [\varphi_{Liku}^{12}(k) \quad \varphi_{Liku}^{13}(k) \quad \cdots \quad \varphi_{Liku}^{1m}(k)]^T \quad (4.2.6-2)$$

$$\rho_{L_i}(k) = [\rho_{Liku}^{12}(k) \quad \rho_{Liku}^{13}(k) \quad \cdots \quad \rho_{Liku}^{1m}(k)]^T \quad (4.2.6-3)$$

$$h_{L_i}(r(k)) = [h_{Liku}^{12}(r(k)) \quad h_{Liku}^{13}(r(k)) \quad \cdots \quad h_{Liku}^{1m}(r(k))]^T \quad (4.2.6-4)$$

$$\begin{aligned} h_{Liku}^{1q}(r(k)) &= \frac{f_i}{c} \left\{ \sqrt{(x_k - x^1)^2 + (y_k - y^1)^2 + (z_k - z^1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(x_k - x^q)^2 + (y_k - y^q)^2 + (z_k - z^q)^2} \right\} \\ &\quad - \frac{f_i}{c} \left\{ \sqrt{(x_u - x^1)^2 + (y_u - y^1)^2 + (z_u - z^1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(x_u - x^q)^2 + (y_u - y^q)^2 + (z_u - z^q)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.2.6-5)$$

$$\varepsilon_{\varphi_{L_i}}(k) = [\varepsilon_{\varphi_{Liku}}^{12} \quad \varepsilon_{\varphi_{Liku}}^{13} \quad \cdots \quad \varepsilon_{\varphi_{Liku}}^{1m}]^T \quad (4.2.6-6)$$

$$\varepsilon_{\rho_{L_i}}(k) = [\varepsilon_{\rho_{Liku}}^{12} \quad \varepsilon_{\rho_{Liku}}^{13} \quad \cdots \quad \varepsilon_{\rho_{Liku}}^{1m}]^T \quad (4.2.6-7)$$

$$\varepsilon_{I_{L_1}}(k) = [\varepsilon_{I_{L_1ku}}^{12} \quad \varepsilon_{I_{L_1ku}}^{13} \quad \cdots \quad \varepsilon_{I_{L_1ku}}^{1m}]^T \quad (4.2.6-8)$$

$$\varepsilon_T(k) = [\varepsilon_{Tku}^{12} \quad \varepsilon_{Tku}^{13} \quad \cdots \quad \varepsilon_{Tku}^{1m}]^T \quad (4.2.6-9)$$

式(4.2.6-1)において $h_{L_i}(r(k))$ を一段予測値 $\hat{r}(k|k-1)$ のまわりでテイラー級数展開し、2次以上の項を削除すると、 $h_{L_i}(r(k))$ は近似的に式(4.2.6-10)のように表される。

$$h_{L_i}(r(k)) \approx h_{L_i}(\hat{r}(k|k-1)) + \left. \frac{\partial h_{L_i}(r(k))}{\partial r(k)} \right|_{r(k)=\hat{r}(k|k-1)} (r(k) - \hat{r}(k|k-1)) \quad (4.2.6-10)$$

ここで、式(4.2.6-11)及び式(4.2.6-12)に示す $y(k)$ を定義する。

$$y(k) \equiv \begin{bmatrix} \varphi_{L_1}(k) \\ \varphi_{L_2}(k) \\ \rho_{L_1}(k) \\ \rho_{L_2}(k) \\ I'_{L_1}(k) \\ T'(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{L_1}(\hat{r}(k|k-1)) - H_{L_1}(k)\hat{r}(k|k-1) \\ h_{L_2}(\hat{r}(k|k-1)) - H_{L_2}(k)\hat{r}(k|k-1) \\ h_{L_1}(\hat{r}(k|k-1)) - H_{L_1}(k)\hat{r}(k|k-1) \\ h_{L_2}(\hat{r}(k|k-1)) - H_{L_2}(k)\hat{r}(k|k-1) \\ O \\ O \end{bmatrix} \quad (4.2.6-11)$$

$$H_{L_i}(k) = \left. \frac{\partial h_{L_i}(r(k))}{\partial r(k)} \right|_{r(k)=\hat{r}(k|k-1)} \quad (4.2.6-12)$$

式(4.2.6-10)～式(4.2.6-12)を用いて、式(4.2.6-13)～式(4.2.6-20)に示す線形化された観測方程式が得られる。

$$y(k) = \begin{bmatrix} H_{L_1}(k) & O & O & O \\ H_{L_2}(k) & O & O & O \\ H_{L_1}(k) & O & O & O \\ H_{L_2}(k) & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \xi(k) + \begin{bmatrix} N_{L_1}(k) \\ N_{L_2}(k) \\ O \\ O \\ O \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} I_{L_1}(k) \\ -\frac{1}{\lambda_2} \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} I_{L_1}(k) \\ I_{L_1}(k) \\ \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} I_{L_1}(k) \\ I_{L_1}(k) \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} T(k) \\ \frac{1}{\lambda_2} T(k) \\ T(k) \\ T(k) \\ O \\ T(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{\varphi_{L_1}}(k) \\ \varepsilon_{\varphi_{L_2}}(k) \\ \varepsilon_{\rho_{L_1}}(k) \\ \varepsilon_{\rho_{L_2}}(k) \\ \varepsilon_{I_{L_1}}(k) \\ \varepsilon_T(k) \end{bmatrix} = C(k)\eta(k) + \varepsilon(k) \quad (4.2.6-13)$$

$$C(k) = \begin{bmatrix} H_{L1}(k) & O & O & O & I & O & -\frac{1}{\lambda_1}I & I \\ H_{L2}(k) & O & O & O & O & I & -\frac{1}{\lambda_2} \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} I & I \\ H_{L1}(k) & O & O & O & O & O & I & I \\ H_{L2}(k) & O & O & O & O & O & \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} I & I \\ O & O & O & O & O & O & I & O \\ O & O & O & O & O & O & O & I \end{bmatrix} \quad (4.2.6-14)$$

$$H_{Li}(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_{Liku}^{12}}{\partial x_u} & \frac{\partial \phi_{Liku}^{12}}{\partial y_u} & \frac{\partial \phi_{Liku}^{12}}{\partial z_u} \\ \frac{\partial \phi_{Liku}^{13}}{\partial x_u} & \frac{\partial \phi_{Liku}^{13}}{\partial y_u} & \frac{\partial \phi_{Liku}^{13}}{\partial z_u} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{Liku}^{1m}}{\partial x_u} & \frac{\partial \phi_{Liku}^{1m}}{\partial y_u} & \frac{\partial \phi_{Liku}^{1m}}{\partial z_u} \\ \frac{\partial \phi_{Liku}^{1q}}{\partial x_u} & \frac{\partial \phi_{Liku}^{1q}}{\partial y_u} & \frac{\partial \phi_{Liku}^{1q}}{\partial z_u} \end{bmatrix} \quad (4.2.6-15)$$

$$\frac{\partial \phi_{Liku}^{1q}}{\partial x_u} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{(x_k - x^1)}{\rho_u^1} - \frac{1}{\lambda_i} \frac{(x_k - x^q)}{\rho_u^q} \quad (4.2.6-16)$$

$$\frac{\partial \phi_{Liku}^{1q}}{\partial y_u} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{(y_k - y^1)}{\rho_u^1} - \frac{1}{\lambda_i} \frac{(y_k - y^q)}{\rho_u^q} \quad (4.2.6-17)$$

$$\frac{\partial \phi_{Liku}^{1q}}{\partial z_u} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{(z_k - z^1)}{\rho_u^1} - \frac{1}{\lambda_i} \frac{(z_k - z^q)}{\rho_u^q} \quad (4.2.6-18)$$

$$\rho_u^q = \sqrt{(x_u - x^q)^2 + (y_u - y^q)^2 + (z_u - z^q)^2} \quad (4.2.6-19)$$

$$\varepsilon(k) \equiv \left[\varepsilon_{\phi_{L1}}^T(k) \quad \varepsilon_{\phi_{L2}}^T(k) \quad \varepsilon_{\rho_{L1}}^T(k) \quad \varepsilon_{\rho_{L2}}^T(k) \quad \varepsilon_{I_{L1}}^T(k) \quad \varepsilon_T^T(k) \right]^T \quad (4.2.6-20)$$

4.2.7 カルマンフィルタ (アンビギュイティ実数解の算出)

カルマンフィルタの演算内容を以下に示す。ここで、アンビギュイティの実数解の算出を行う。

(1) 機能

カルマンフィルタの演算を行う。

(2) アルゴリズム

状態方程式と観測方程式をカルマンフィルタに適用すると、以下のように表される。

a) フィルタ方程式

$$\hat{\xi}_i(k+1|k) = \Phi_i(\Delta t, \alpha) \hat{\xi}_i(k|k) \quad (4.2.7-1)$$

$$\hat{\xi}_i(k|k) = \hat{\xi}_i(k|k-1) + K(k) [y(k) - H(k) \hat{\xi}_i(k|k-1)] \quad (4.2.7-2)$$

b) カルマンゲイン

$$K(k) = P(k|k-1)H^T(k) [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (4.2.7-3)$$

c) 推定誤差共分散行列

$$P(k|k-1) = \Phi_i(\Delta t, \alpha)P(k-1|k-1)\Phi_i^T(\Delta t, \alpha) + Q(k) \quad (4.2.7-4)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)H(k)P(k|k-1) \quad (4.2.7-5)$$

4.2.8 アンビギュイティ整数解の探索

アンビギュイティ整数解の算出内容を以下に示す。

(1) 機能

LAMBDA 法を適用してアンビギュイティの整数解を探索する。

(2) アルゴリズム

ここでは LAMBDA (Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment) 法について解説する。LAMBDA 法は、整数値バイアスの推定法として最も実用化が進んでいるアルゴリズムの一つである。その名が示すように整数値バイアスの各要素の無相関化を行い、整数解を求めるものであり、LAMBDA 法を応用した手法も各種考案されている。この計算アルゴリズムは以下のステップからなる。

ステップ 1： 最小 2 乗法で実数解を求める (4.2.7 のカルマンフィルタで求める)

ステップ 2： 整数値バイアスの無相関化を行う

ステップ 3： 整数解の探索空間を定め、解を得る ($\tilde{\chi}^2$ の設定については 3) 項で述べる)

前節で、観測方程式を説明したが、以下では一般性を損なわないように、新たに観測方程式を次のように定義する。

$$y(t) = H(t)\xi(t) + N + \varepsilon(t),$$

y : 観測ベクトル
 $\xi \in R^3$: 未知局座標 (4.2.8-1)
 $N \in Z^{n_a}$: 整数値バイアス
 ε : 観測雑音

LAMBDA法の目的は、重み付き最小2乗規範により、未知量 x 、 N の推定値 $\tilde{\xi}$ 、 \tilde{N} を

$$(\tilde{\xi}, \tilde{N}) = \arg \min_{(\xi, N) \in R^3 \times Z^{n_a}} \sum_{t=1}^{n_s} \|y(t) - H(t)\xi(t) - N\|_{R^{-1}(t)}^2 \quad (4.2.8-2)$$

として求めることである。この問題を解くためにLAMBDA法では、まず最初は N を実数値とみなして最小2乗解 $\hat{\xi}$ 、 \hat{N} を求める。すなわち、

$$(\hat{\xi}, \hat{N}) = \arg \min_{(\xi, N) \in R^3 \times R^{n_a}} \sum_{t=1}^{n_s} \|y(t) - H(t)\xi(t) - N\|_{R^{-1}(t)}^2 \quad (4.2.8-3)$$

具体的には前記のカルマンフィルタを適用して求めることができる。この実数解 \hat{N} を用いて、整数解 \tilde{N} についての規範：

$$\tilde{N} = \arg \min_{N \in Z^{n_a}} \|\hat{N} - N\|_{Q_N^{-1}}^2 \quad (4.2.8-4)$$

により \tilde{N} を求めることが目的である。また整数解 \tilde{N} が求まると、次式により最小2乗解 $\tilde{\xi}$ が求まる。

以上の計算過程での問題点は式(4.2.8-4)での \tilde{N} の推定である。最小2乗規範の重み行列である Q_N^{-1} が対角行列でないため（すなわち \hat{N} の各要素が相関をもつため）、 \hat{N} の各要素についての四捨五入操作により、最近傍の整数値を推定値 \tilde{n} として求められないことである。このために、LAMBDA法では以下のような推定誤差共分散行列 Q_N^{-1} の対角化（ \hat{N} の無相関化）が提案されている。

1) 無相関化と整数値の探索

式(4.2.8-3)の実数解 \hat{N} の推定誤差共分散行列 Q_N （対称行列）に対して、直交行列 Z により対角化を行い、その対角行列を $Q_{\hat{z}}$ とする。すなわち

$$Q_{\hat{z}} = Z^T Q_N Z \quad (4.2.8-5)$$

ここで、

$$\hat{z} = Z^T \hat{N} \quad (4.2.8-6)$$

とすると、式(4.2.8-4)は

$$\tilde{N} = \arg \min_{N \in Z^{n_a}} (\hat{z} - Z^T N)^T Q_{\hat{z}}^{-1} (\hat{z} - Z^T N) \quad (4.2.8-7)$$

と表現できる。

式(4.2.8-7)の $Q_{\hat{z}}^{-1}$ が対角行列であり、整数 N から変換された $z \equiv Z^T N$ も整数であれば、四捨五入操作により推定値 \tilde{N} を求めることができる。しかし、 z が整数であるためには、変換行列 Z の要素がすべて整数でなければならない。そこで、行列 Z の要素が整数となり、

Q_z がほぼ対角行列となる変換法が、 LDL^T 、 UDU^T 分解を用いて以下のように提案されている。

- i) Q_N^{-1} を対角要素がすべて 1 である下三角行列 L_1 により、 $Q_N^{-1} = L_1 D_{L_1} L_1^T$ に分解する。ここで D_{L_1} は対角行列である。
- ii) L_1 の要素を四捨五入した行列を \tilde{L}_1 とし、また、 $Q_{\tilde{L}_1}^{-1} = \tilde{L}_1 Q_N^{-1} \tilde{L}_1^T$ とする。
 $Q_{\tilde{L}_1}^{-1}$ を対角要素がすべて 1 である上三角行列 U_1 により、 $Q_{\tilde{L}_1}^{-1} = U_1 D_{U_1} U_1^T$ と分解する。ここに D_{U_1} は対角行列である。
- iii) U_1 の要素を四捨五入した行列を \tilde{U}_1 とし、 $Q_{\tilde{U}_1}^{-1} = \tilde{U}_1 Q_{\tilde{L}_1}^{-1} \tilde{U}_1^T$ とする。
 \tilde{L}_1 または \tilde{U}_1 が単位行列となるまで (1) ~ (4) を繰り返す。

以上のアルゴリズムにより、1) ~ 4) までの繰り返し回数を l とすると、変換行列 Z および誤差共分散行列 Q_z を

$$Z = \prod_{k=1}^l \tilde{L}_k \tilde{U}_k \quad (4.2.8-8)$$

$$Q_z = Z^T Q_N Z$$

として求める（実際には、若干の行、列の入れ換えのための基本行列が \tilde{L}_k 、 \tilde{U}_k の間に挟まれる。

次に整数値バイアスの候補点を求めるため探索を行う。すなわち、領域(楕円体)

$$(\hat{z} - z)^T Q_z^{-1} (\hat{z} - z) \leq \tilde{\chi}^2 \quad (4.2.8-9)$$

内に含まれる整数点を探索する。 $\tilde{\chi}^2$ は探索空間の大きさを決定するパラメータである。 Q_z は完全には対角化されていないが、整数解の候補点の範囲が狭められており、この範囲に含まれる候補点の中で式(4.2.8-7)の解を選出する。

以下では、LAMBDA 法で用いられている探索方法を示す。ただし、ここでは N 、 Q_N^{-1} に対する探索方法を示す。上で述べた無相関化を施した z 、 Q_z^{-1} に対しても全く同様の探索が可能であり、より効果的な探索が可能である。 Q_N^{-1} を LDL^T に分解すると、式(4-8-4)は

$$(\hat{N} - N)^T Q_N^{-1} (\hat{N} - N) = \sum_{i=1}^{n_a} d_i \left[(N_i - \hat{N}_i) + \sum_{j=i+1}^{n_a} l_{j,i} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2 \quad (4.2.8-10)$$

となる。ただし N_i 、 \hat{N}_i は各々 N 、 \hat{N} の i 要素、 $l_{j,i}$ は L の (i,j) 要素、 d_i は D の (i,i) 要素である。ここで

$$\hat{N}_{i|i+1, \dots, n_a} \equiv \hat{N}_i - \sum_{j=i+1}^{n_a} l_{j,i} (N_j - \hat{N}_j) \quad (4.2.8-11)$$

と定義すると $d_i^{-1} = \sigma_{\hat{N}_{i|i+1, \dots, n_a}}^2$ (条件付き分散) なる関係から式(4-8-10)は

$$\sum_{i=1}^{n_a} \frac{(N_i - N_{i|i+1, \dots, n_a})^2}{\sigma_{\hat{N}_{i+1, \dots, n_a}}^2} \leq \tilde{\chi}^2 \quad (4.2.8-12)$$

と表現できる。もし無相関なら $L = I_{n_a}$ であり $l_{j,i} = 0$ ($i \neq j$) より

$$\hat{N}_{i|i+1, \dots, n_a} = \hat{N}_i \quad (4.2.8-13)$$

が成立する。

2) 要素ごとの範囲の計算

$N_{i+2} \sim N_{n_a}$ が既知であり、 $N_1 \sim N_i$ が未知である場合、 N_{i+1} の探索範囲を求める方法を以下に示す。式(4.2.8-10)より

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^i d_k \left[(N_k - \hat{N}_k) + \sum_{j=k+1}^{n_a} l_{j,k} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2 \\ & + d_{i+1} \left[(N_{i+1} - \hat{N}_{i+1}) + \sum_{j=i+2}^{n_a} l_{j,i+1} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2 \\ & + \sum_{p=i+2}^{n_a} d_p \left[(N_p - \hat{N}_p) + \sum_{j=p+1}^{n_a} l_{j,p} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2 \leq \tilde{\chi}^2 \end{aligned} \quad (4.2.8-14)$$

が成立する。

ここで $\alpha^2 + \beta^2 \leq \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 \leq \gamma^2$ より、上式左辺の第1項目を消去し、第3項目を右辺に移項し両辺を $d_{i+1} (\neq 0)$ で割ると式(4.2.8-15)が得られる。

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[(N_{i+1} - \hat{N}_{i+1}) + \sum_{j=i+2}^{n_a} l_{j,i+1} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2}_{\text{left}_{i+1}} \\ & \leq \frac{\tilde{\chi}^2}{d_{i+1}} - \frac{1}{d_{i+1}} \underbrace{\sum_{p=i+2}^{n_a} d_p \left[(N_p - \hat{N}_p) + \sum_{j=p+1}^{n_a} l_{j,p} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2}_{\text{right}_{i+1}} \end{aligned} \quad (4.2.8-15)$$

さらに i についても式(4.2.8-15)と同様に

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[(N_i - \hat{N}_i) + \sum_{j=i+1}^{n_a} l_{j,i} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2}_{\text{left}_i} \\ & \leq \frac{\tilde{\chi}^2}{d_i} - \frac{1}{d_i} \underbrace{\sum_{p=i+1}^{n_a} d_p \left[(N_p - \hat{N}_p) + \sum_{j=p+1}^{n_a} l_{j,p} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2}_{\text{right}_i} \end{aligned} \quad (4.2.8-16)$$

が得られ、結局、式(4.2.8-17)の関係を得る。

$$\underbrace{\left[(N_i - \hat{N}_i) + \sum_{j=i+1}^{n_a} l_{j,i} (N_j - \hat{N}_j) \right]^2}_{\text{left}_i} \leq \frac{d_{i+1}}{d_i} \underbrace{\left(\text{right}_{i+1} - \text{left}_{i+1} \right)}_{\text{right}_i} \quad (4.2.8-17)$$

これは $i = n_a - 1, \dots, 1$ まで $left_i$ 、 $right_i$ を逐次的に計算できることを示している。すなわち逐次計算は $i = n_a$ から始まり、 $i = n_a$ では式(4.2.8-10)より

$$\underbrace{(N_{n_a} - \hat{N}_{n_a})^2}_{left_{n_a}} \leq \frac{\tilde{\chi}^2}{\underbrace{d_{n_a}}_{right_{n_a}}} \quad (4.2.8-18)$$

である。 N_i に対して有効な整数値の候補の範囲は式(4.2.8-17)の平方根をとって

$$\left| (N_i - \hat{N}_i) + \sum_{j=i+1}^{n_a} l_{j,i} (N_j - \hat{N}_j) \right| \leq \sqrt{right_i} \quad (4.2.8-19)$$

すなわち

$$\hat{N}_i - \sqrt{right_i} - \sum_{j=i+1}^{n_a} l_{j,i} (N_j - \hat{N}_j) \leq N_i \leq \hat{N}_i + \sqrt{right_i} - \sum_{j=i+1}^{n_a} l_{j,i} (N_j - \hat{N}_j) \quad (4.2.8-20)$$

として N_i に対する探索範囲を定める。この範囲は左から右(下限から上限)へ一直線に探索され、この範囲にある有効な整数値に対して、式(4.2.8-11)を用いて N_{i-1} への補正が行われる。このような探索法を depth-first search と呼ぶ。ある整数値バイアス要素 N_i に対して有効な候補がない、つまり範囲内にない場合、1つ前の整数値バイアス要素 N_{i+1} に戻って次に有効な N_{i+1} の候補で depth-first search を始める。 N_1 まで式(4.2.8-20)を満たせば完全な整数値バイアスペクトル N の候補ができあがる。これをすべての有効な整数値バイアス要素に対して行い、候補を絞り込む。

また、式(4.2.8-19)は

$$-\sqrt{right_i} \leq (N_i - \hat{N}_{i|_{i+1, \dots, n_a}}) \leq \sqrt{right_i} \quad (4.2.8-21)$$

と表現できる。この不等式は N_i の候補の中心が $\hat{N}_{i|_{i+1, \dots, n_a}}$ であり、 $\hat{N}_{i|_{i+1, \dots, n_a}}$ の四捨五入値が最も適切な候補であることを示している。

3) $\tilde{\chi}^2$ の設定

この値により楕円体の大きさが変わり、楕円体内の候補点の個数も変化する。したがって大きな $\tilde{\chi}^2$ では探索範囲の候補数が増え、探索の計算処理時間が増加する。このため楕円領域を徐々に狭めていく方法がとられている。すなわち、式(4.2.8-4)を満足する候補ベクトル \tilde{N} が求まると、ノルム $\|\hat{N} - \tilde{N}\|_{Q_N^{-1}}^2$ を計算し、その値から新しい $\tilde{\chi}^2$ を設定し、候補数が2個になるまで繰り返す。 $\tilde{\chi}^2$ の初期値は $\|\hat{N} - \text{round}(\hat{N})\|_{Q_N^{-1}}^2$ で与えられる。

4.2.9 アンビギュイティ整数解の検定

アンビギュイティ整数解の検定手法を以下に示す。

(1) 機能

アンビギュイティ整数解の検定を行う。

(2) アルゴリズム

LAMBDA法で求めたアンビギュイティの第1候補と第2候補における残差の二乗和の比を算出し、その比が閾値以下である場合、第1候補がアンビギュイティ整数解であると決定する。閾値より大きい場合、第1候補がアンビギュイティ整数解でないと判断する。数回連続して、残差の二乗和の比が閾値以下である場合にアンビギュイティを決定する。

4.2.10 位置探索手法

アンビギュイティ決定が可能な位置の探索手法を以下に示す。

(1) 機能

アンビギュイティ決定が可能となる位置の探索を行う。

(2) アルゴリズム

アンビギュイティを高速に決定するためにはアンビギュイティにかかわる誤差を低減する必要があり、それらの誤差の一つに位置誤差がある。この項では位置誤差がある程度の大きさである状況においてもアンビギュイティを決定できる方法について説明する。

図 4.2.10-1 は位置誤差とアンビギュイティ決定との関係を表す概念図である。推定位置が真値から数十 cm あるいは約 1m の範囲であれば、アンビギュイティを決定できる。この範囲をアンビギュイティ決定範囲と呼ぶことにする。しかし、推定位置の初期値は DGPS で求めるため、数 m の誤差が推定位置に含まれてしまうことがある。このため、推定位置がアンビギュイティ決定範囲に入るまでに長い時間の観測データを要する。そこで、推定位置の周りでアンビギュイティを決定できる位置を探索することにより、高速にアンビギュイティを決定する。この手法をアンビギュイティ決定のための位置探索手法と呼ぶことにする。

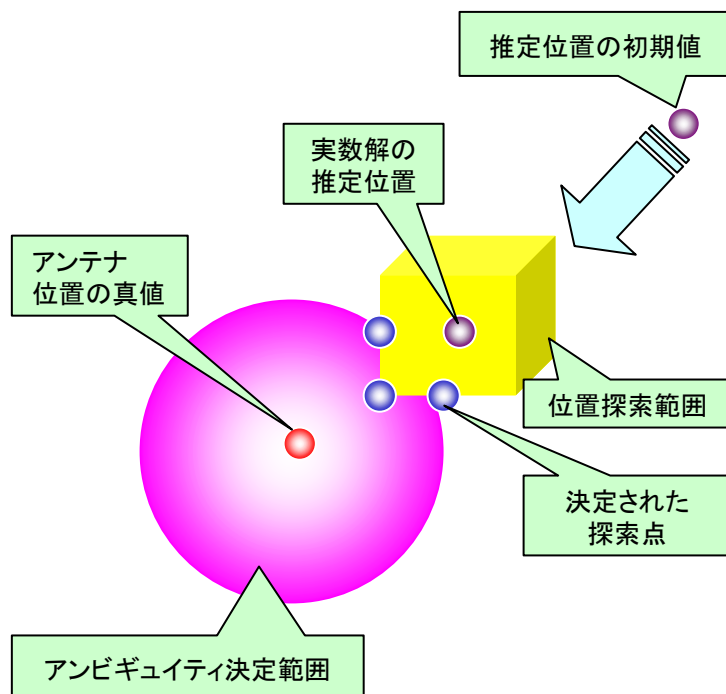


図 4.2.10-1 アンビギュイティ決定状況

この位置探索アルゴリズムを図 4.2.10-2 に示す。

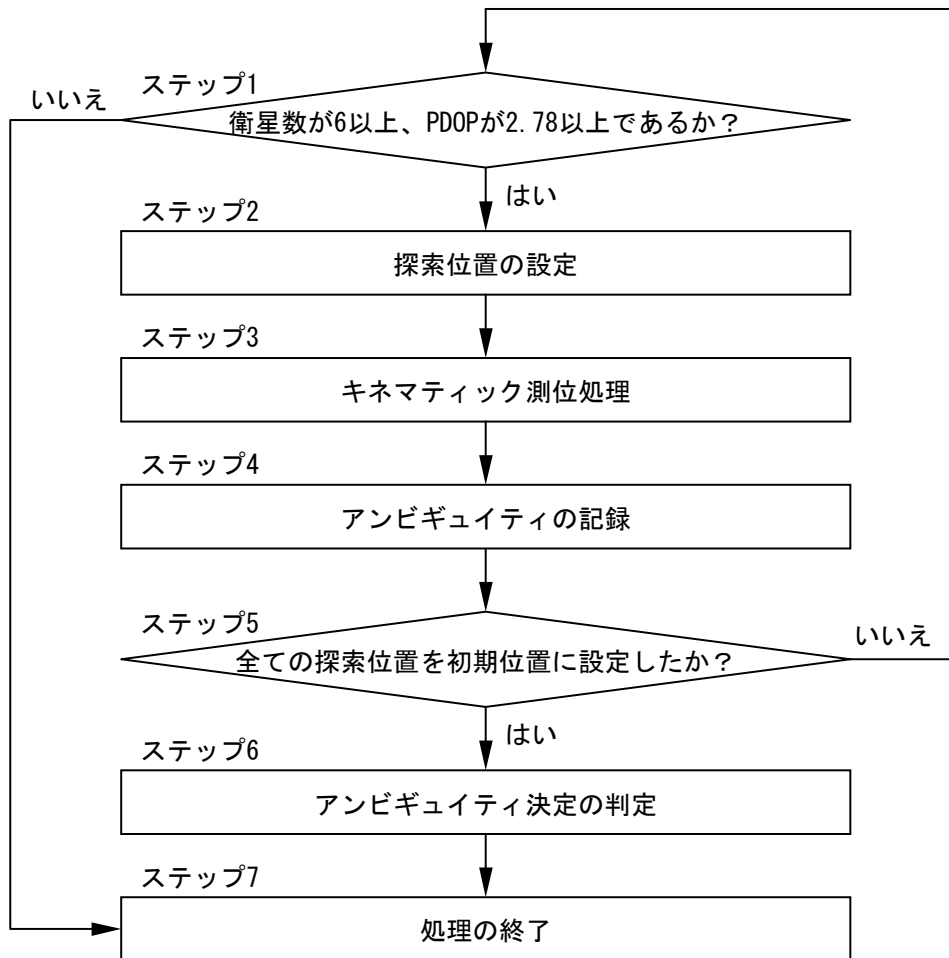


図 4.2.10-2 アンビギュイティ決定のための位置探索アルゴリズム

- ステップ 1：衛星数が 6 以上、PDOP(Position Dilution of Precision)が 2.78 以上である場合、ステップ 2 に進む。5 以下である場合、ステップ 7 に進む。
- ステップ 2：推定位置に探索範囲のバイアスを加え、それを初期位置とする。バイアスは東西、南北、上下方向のそれぞれについて-0.25m、0.00m、0.25m を設定する。その組み合わせは、(0.00, 0.00, 0.00)を除いた 26 通り ($=3 \times 3 \times 3 - 1$) である。
- ステップ 3：図 4.2.2.10-1 に示す RTK-GPS アルゴリズムを実施する。
- ステップ 4：ステップ 3 でアンビギュイティを決定できた場合、アンビギュイティを記録する。
- ステップ 5：全ての探索位置を初期位置に設定した場合、ステップ 6 に進む。設定していない場合、ステップ 1 に進む。
- ステップ 6：決定されたアンビギュイティの種類が 1 つである場合、それをアンビギュイティとする。2 つ以上である場合、アンビギュイティが決定されないと判定する。
- ステップ 7：アンビギュイティ決定のための位置探索処理を終了する。

4.2.11 移動局位置の算出

決定されたアンビギュイティを用いて移動局位置の算出方法を以下に示す。

(1) 機能

決定されたアンビギュイティを用いて位置の更新を行う。

(2) アルゴリズム

式(4.2.11-1)を用いて、アンビギュイティ整数解 N をもとに移動局位置 $r_{fx}(k)$ を計算する。ここで、 $\hat{r}(k|k)$ は移動局位置の推定量、 $P_{\hat{N}}(k|k)$ はアンビギュイティの推定誤差共分散行列、 $P_{\hat{x}\hat{N}}(k|k)$ は移動局位置の推定量とアンビギュイティ実数解の推定量の分散共分散行列、 $\hat{N}(k|k)$ はアンビギュイティ実数解の推定量である。

$$r_{fx}(k) = \hat{r}(k|k) - P_{\hat{x}\hat{N}}(k|k)P_{\hat{N}}^{-1}(k|k)\{\hat{N}(k|k) - N\}$$

(4.2.11-1)

4.3 慣性航法複合演算処理

4.3.1 処理フロー

慣性航法複合演算処理の処理フローを図 4.3.1-1 に示す。

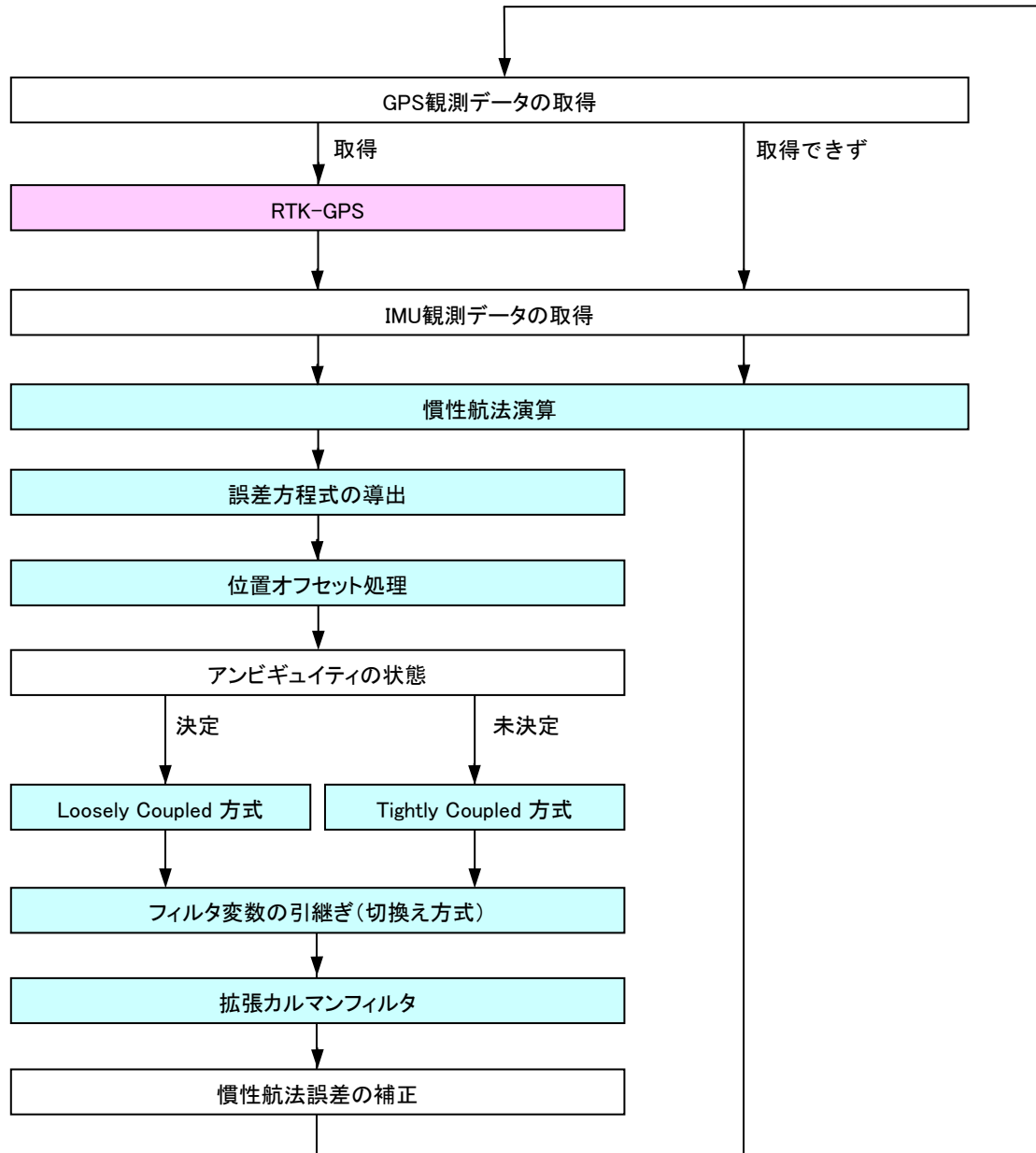


図 4.3.1-1 複合航法の処理フロー

4.3.2 座標系の定義

慣性航法複合演算処理の説明を行う前に本ソフトウェアで用いる座標系について説明する。

移動体の位置（緯度、経度、高度）、姿勢角及び方位角を慣性航法演算によって求めるためには、座標軸の設定が重要である。これらは、基本的に右手系の直交デカルト座標系であるものとし、座標軸を (X, Y, Z) で表す。

(1) I 座標系 (X_I, Y_I, Z_I) Inertial Frame

I 座標系は地球の質量中心を原点にとり、 Z_I 軸は北極点の方向を正とする地軸上に、 X_I 軸と Y_I 軸を赤道面にとり、 X_I 軸は遠い星方向（春分点の方向とする場合もある）を向いているものとする。

(2) E 座標系 (X_E, Y_E, Z_E) Earth-Centered Earth-Fixed Frame

E 座標系は地球と共に回転し、24 時間（正確には恒星日）ごとに I 座標系に一致する。 Z_E 軸は Z_I 軸と等しく北極点の方向を正とする地軸上に、 X_E 軸はグリニッジ子午線と赤道面の交点の方向を正とし、 Y_E 軸を、 X_E 軸を含む赤道面上で Z_E 、 X_E 軸と右手系を成す方向（東経 90 [deg]）に定めたものである。E 座標系は、緯度、経度など移動体の位置を表すために用いられる。

(3) L 座標系 (X_L, Y_L, Z_L) Locally Level Frame

L 座標系は、移動体の現在位置を原点とする局地水平座標系である。北向きを X_L 軸、東向きを Y_L 軸とし、下向きに Z_L 軸をとる NED (North-East-Down) 座標系である。この座標系は、移動体の速度を表すために用いられる。

(4) C 座標系 (X_C, Y_C, Z_C) Computer Frame

C 座標系は計算機内に作り出される座標系で、計算機座標系やワンダーアジマス座標系 (Wander-Azimuth Frame) と呼ばれる。L 座標系と同様、移動体の現在位置を原点とする。北向きを X_C 軸、西向きを Y_C 軸、鉛直上向きを Z_C 軸とした右手系を、 Z_C 軸まわりに "wander angle" と呼ばれる角度 α だけ回転させたものとして定義される。wander angle α は真の北方向に対して西向きを正とするような角度である。

航法座標系として L 座標系を用いないのは、L 座標系の X_L 軸は絶えず北を向いているため、移動体が高緯度で東向きに移動する場合、 Z_L 軸まわりには座標系を保つような大きな回転角が必要になるためである。このような問題を避けるために、真の北向きからのずれを考慮した座標系を定義して信頼性を向上させている。図 4.3.2-1 に E、L、C 座標系を、図 4.3.2-2 に局地水平面内での wander angle と L、C 座標系の関係を示す。

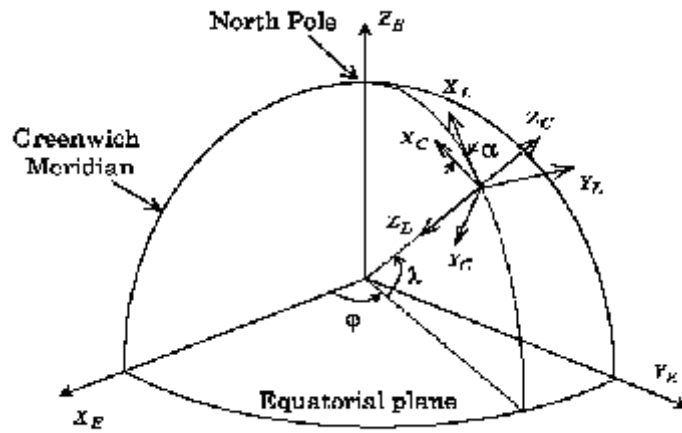


図 4.3.2-1 E、L および C 座標系

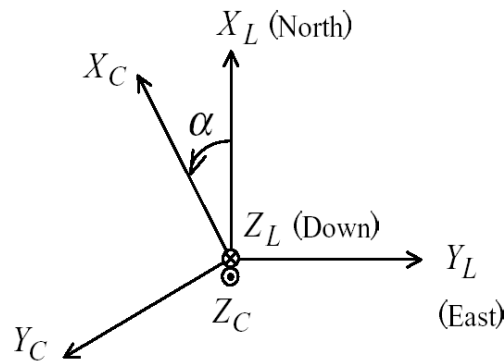


図 4.3.2-2 局地水平面内での wander angle と L および C 座標系

(5) B 座標系 (X_B, Y_B, Z_B) Body Frame

B 座標系は移動体の質量中心を原点にとる座標系で、機体座標系と呼ばれる。これは、車両の先頭方向を X_B 軸（ロール軸、roll axis）、車体の右側を Y_B 軸（ピッチ軸、pitch axis）、 $X_B - Y_B$ 平面に対して垂直下向きを Z_B （ヨー軸、yaw axis）の正方向として表す。加速度計、ジャイロは車体に直接固定して設置され、B 座標系の座標軸に沿った加速度、角速度を検知する。図 4.3.2-3 に B 座標系と、移動体に搭載された加速度計、ジャイロを模式的に示す。

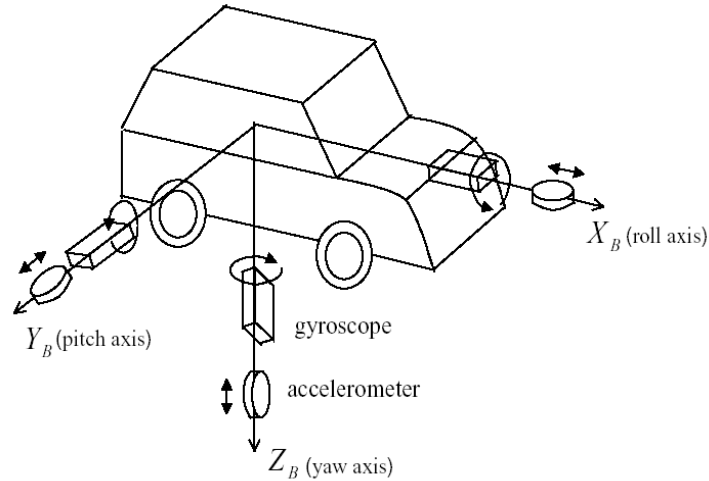


図 4. 3. 2-3 B 座標系と加速度計、ジャイロ

4. 3. 3 慣性航法演算

INS(Inertial Navigation System: 慣性航法装置)の慣性航法演算 (ストラップダウン方式) の算出内容を以下に示す。

(1) 機能

IMU(Inertial Measurement Unit)データを用いて位置、速度、姿勢、方位を算出する。

(2) アルゴリズム

1) 初期化処理

慣性航法演算を行うために、まず B 座標系から C 座標系への座標変換行列の初期値、および E 座標系から C 座標系への座標変換行列の初期値を求める。B 座標系から C 座標系への座標変換行列の初期値を求めるために、ロール角 Φ_0 、ピッチ角、 Θ_0 よりクォータニオンの初期化を行う。クォータニオンの初期値は

$$w_0 = \cos \frac{\Theta_0}{2} \cos \frac{\Phi_0}{2} \quad (4. 3. 3-1)$$

$$x_0 = \cos \frac{\Theta_0}{2} \sin \frac{\Phi_0}{2} \quad (4. 3. 3-2)$$

$$y_0 = \sin \frac{\Theta_0}{2} \cos \frac{\Phi_0}{2} \quad (4. 3. 3-3)$$

$$z_0 = -\sin \frac{\Theta_0}{2} \sin \frac{\Phi_0}{2} \quad (4. 3. 3-4)$$

となる。得られた $(w_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0)$ を用いて、B 座標系から C 座標系への変換行列 T_B^C を求めると、

$$T_B^C = \begin{bmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) \\ 2(xy + wz) & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.3-5)$$

となる。E座標系からC座標系への変換行列は、緯度、経度の初期値に加え、求めた wander angle の初期値を用いて

$$T_E^C = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_0 \sin \lambda \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi & -\cos \alpha \sin \lambda \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi & \cos \alpha \cos \lambda \\ \sin \alpha \sin \lambda \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi & \sin \alpha \sin \lambda \sin \varphi - \cos \alpha \cos \varphi & -\sin \alpha \cos \lambda \\ \cos \lambda \cos \varphi & \cos \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (4.3.3-6)$$

となる。その他に航法演算を始める準備として、座標変換行列 T_E^C を用いて地球の重力モデルの計算（後述の手順 11）参照）を行う必要がある。

上記の初期化処理を完了させた後、図 4.3.3-1 に示す慣性航法演算を行い、得られた INS 位置及び速度を基に、カルマンフィルタを適用した複合航法演算が行われる。

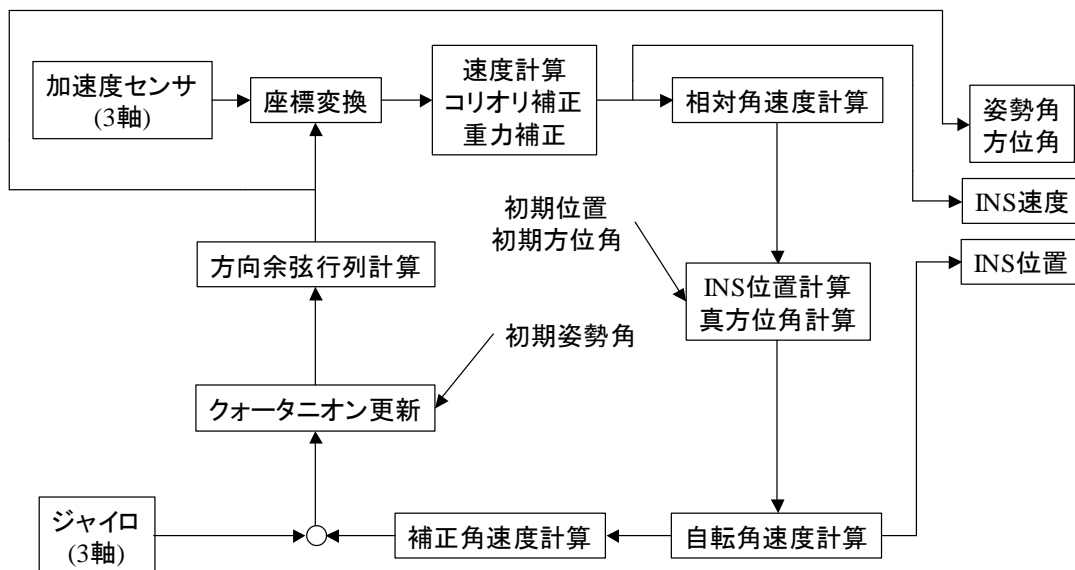


図 4.3.3-1 慣性航法演算ブロック図

2) 航法演算開始

アライメントが完了し、移動体が運用モードに移行すると同時に、慣性航法演算が開始される。ここで、INS の航法演算間隔を ΔT とする。

3) 角速度前処理

移動体の ΔT 間の姿勢変化に伴う、角速度の C 座標系でのふるまいは、地球自転角速度 Ω と相対角速度 ρ の補正を行って

$$\begin{cases} \omega_{C,x} = (-\Omega_{C,x} - \rho_{C,x})\Delta T \\ \omega_{C,y} = (-\Omega_{C,y} - \rho_{C,y})\Delta T \\ \omega_{C,z} = (-\Omega_{C,z} - \rho_{C,z})\Delta T \end{cases} \quad (4.3.3-7)$$

となる。次に、これを B 座標系の 3 軸成分に変換すると

$$\begin{bmatrix} \omega_{B,x} \\ \omega_{B,y} \\ \omega_{B,z} \end{bmatrix} = (T_B^C)^T \begin{bmatrix} \omega_{C,x} \\ \omega_{C,y} \\ \omega_{C,z} \end{bmatrix} \quad (4.3.3-8)$$

が得られる。

4) 角速度処理

ジャイロが時刻 t に出力する角速度を $\omega_{B,x}(t), \omega_{B,y}(t), \omega_{B,z}(t)$ とする。このとき、演算間隔 ΔT で生ずる移動体の角変動量 ($rad / \Delta T \cdot s$) は、 $\omega'_{B,x}, \omega'_{B,y}, \omega'_{B,z}$ を用いて

$$\begin{cases} \omega'_{B,x} = \omega_{B,x}(t) - \omega_{B,x}(t - \Delta T) \\ \omega'_{B,y} = \omega_{B,y}(t) - \omega_{B,y}(t - \Delta T) \\ \omega'_{B,z} = \omega_{B,z}(t) - \omega_{B,z}(t - \Delta T) \end{cases} \quad (4.3.3-9)$$

となる。

5) 座標変換行列 T_B^C の更新と姿勢角算出

まず、式 (4.3.3-9) で算出された角速度を用いて、クォータニオンの時間更新を行う。更新式は

$$\underline{\dot{q}}(t) = \Omega(\underline{\omega}(t))\underline{q}(t), \underline{q}(t_0) = \underline{q}_0 \quad (4.3.3-10)$$

となる。ただし、

$$\underline{\dot{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad \Omega(\underline{\omega}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

とする。更新されたパラメータを式 (4.3.3-5) へ代入し、 T_B^C の更新を行う。更新された T_B^C より、移動体の姿勢角を求める。ロール角 Φ 、ピッチ角 Θ 、およびヨー角 Ψ はそれぞれ、

$$\Phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{2(yz + wx)}{w^2 - x^2 - y^2 + z^2} \right\} \quad (4.3.3-11)$$

$$\Theta = \sin^{-1}\{2(xz - wy)\} \quad (4.3.3-12)$$

$$\Psi = \tan^{-1}\left\{\frac{-2(xy + wz)}{w^2 + x^2 - y^2 - z^2}\right\} \quad (4.3.3-13)$$

となる。

6) 加速度変換処理

加速度計から直接出力されたB座標系の加速度を、C座標系の加速度へ変換する。すなわち、

$$\begin{bmatrix} a_{C,x} \\ a_{C,y} \\ a_{C,z} \end{bmatrix} = T_B^C \begin{bmatrix} a_{B,x} \\ a_{B,y} \\ a_{B,z} \end{bmatrix} \quad (4.3.3-14)$$

となる。

7) 速度補正演算

C座標系の速度 $v_{C,x}, v_{C,y}, v_{C,z}$ を算出する。この際、C座標系の加速度に加え、地球の自転角速度 Ω 、相対角速度 ρ 、重力加速度 g が必要となる。

速度補正演算の式は

$$\begin{cases} \dot{v}_{C,x} = a_{C,x} - (\rho_{C,y} + 2\Omega_{C,y})v_{C,z} + (\rho_{C,z} + 2\Omega_{C,z})v_{C,y} + g_{C,x} \\ \dot{v}_{C,y} = a_{C,y} - (\rho_{C,z} + 2\Omega_{C,z})v_{C,x} + (\rho_{C,x} + 2\Omega_{C,x})v_{C,z} + g_{C,y} \\ \dot{v}_{C,z} = a_{C,z} - (\rho_{C,x} + 2\Omega_{C,x})v_{C,y} + (\rho_{C,y} + 2\Omega_{C,y})v_{C,x} + g_{C,z} \end{cases} \quad (4.3.3-15)$$

となる。

8) 相対角速度算出

移動体のC座標系の速度 $v_{C,x}, v_{C,y}$ より、相対角速度は

$$\rho_{C,x} = \frac{-v_{C,y}}{R_x + h} \quad (4.3.3-16)$$

$$\rho_{C,y} = \frac{v_{C,x}}{R_y + h} \quad (4.3.3-17)$$

$$\rho_{C,z} = 0 \quad (4.3.3-18)$$

となる。ただし、

$$R_x = \frac{R_p R_m (1 + \tan^2 \alpha)}{R_p + R_m \tan^2 \alpha} \quad R_y = \frac{R_p R_m (1 + \tan^2 \alpha)}{R_m + R_p \tan^2 \alpha}$$

$$R_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} \quad R_p = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}}$$

とし、 h : 高度、 a : 地球の赤道面での長半径、 e : 離心率とする。

9) 座標変換行列 T_C^E の更新と位置の算出

手順 k で求めた相対角速度 ρ を用いて E 座標系から C 座標系への変換行列 T_E^C を更新すると、

$$T_C^E(t_k + \Delta T) \cong \{I + \Omega(t_k)\Delta T\}T_C^E(t_k) \quad (4.3.3-19)$$

となる。ただし、

$$\Omega(t_k) = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_{C,z} & \rho_{C,y} \\ \rho_{C,z} & 0 & -\rho_{C,x} \\ -\rho_{C,y} & \rho_{C,x} & 0 \end{bmatrix}$$

とする。更新された T_E^C より、緯度 λ 、経度 φ 、wander angle α について

$$\lambda = \sin^{-1} C_{33} \quad (4.3.3-20)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{C_{32}}{C_{31}} \quad (4.3.3-21)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{-C_{23}}{C_{13}} \quad (4.3.3-22)$$

を得る。ただし、

$$T_C^E \equiv \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

とする。

10) 地球自転角速度の算出

移動体の現在緯度 λ 、wander angle λ より、地球自転角速度の C 座標系における 3 軸成分は、

$$\Omega_{C,x} = \Omega \cos \lambda \cos \alpha \quad (4.3.3-23)$$

$$\Omega_{C,y} = -\Omega \cos \lambda \sin \alpha \quad (4.3.3-24)$$

$$\Omega_{C,z} = \Omega \sin \lambda \quad (4.3.3-25)$$

となる。ただし、 $\Omega = 7.2921159 \times 10^{-5}$ [rad/sec] とする。

11) 地球重力モデルの計算

更新された座標変換行列 T_C^E より、C 座標系における重力成分は

$$g_{C,x} = g_n \times h \times C_{33} \times C_{13} \quad (4.3.3-26)$$

$$g_{C,y} = g_n \times h \times C_{33} \times C_{23} \quad (4.3.3-27)$$

$$g_{C,z} = -\left(g_0 + g_{l1} \times C_{33}^2 + g_{l2} \times C_{33}^4\right) \times \left\{1 - \left(g_{h1} - g_{h2} \times C_{33}^2\right) \times h + g_{h3} \times h^2\right\} \quad (4.3.3-28)$$

となる。ただし、h: 高度[ft] とし、

$$g_0 = 32.087686[ft/s^2]$$

$$g_{l1} = 0.1693891$$

$$g_{l2} = 7.47483 \times 10^{-4}$$

$$g_{h1} = 9.6227 \times 10^{-8}$$

$$g_{h2} = 6.409 \times 10^{-10}$$

$$g_{h3} = 6.8512 \times 10^{-15}$$

$$g_n = 1.619 \times 10^{-8}$$

とする。

12) 地球モデルの計算

移動体の現在緯度 λ 、wander angle α が算出されたので、地球モデル、すなわち C 座標系での曲率半径は

$$R_x = \frac{R_p R_m (1 + \tan^2 \alpha)}{R_p + R_m \tan^2 \alpha} \quad (4.3.3-29)$$

$$R_y = \frac{R_p R_m (1 + \tan^2 \alpha)}{R_m + R_p \tan^2 \alpha} \quad (4.3.3-30)$$

となる。ただし、

$$R_m = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \lambda)^{3/2}} \quad R_p = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \lambda}}$$

とし、h: 高度、 a : 地球の赤道面での長半径、 e : 離心率とする。

以上 3) ~ 12) の処理が繰り返される。

4.3.4 誤差方程式の算出

慣性航法における誤差をカルマンフィルタで補正するための誤差方程式を算出する。

(1) 機能

慣性航法における誤差方程式を算出する。

(2) アルゴリズム

INS の航法誤差は慣性センサから得られる物理量を航法演算の基準となる演算座標系 (C 座標系) での値に座標変換を行う際に生じると考え、その座標変換行列の誤差は INS の誤差源と上記で述べた初期誤差により生じると考える。したがって、局地水平面座標系 (L 座標系) から C 座標系への座標変換行列において方位角誤差による航法誤差への影響を考慮する。なお、INS の誤差源は加速度センサ、ジャイロの誤差のみと仮定する。また、航法誤差は位置誤差、速度誤差、姿勢角誤差、方位角誤差を考え、アライメントにおける方位角誤差は方位角に相当する wander angle の誤差とする。

以下では、

- 1) 位置誤差
- 2) 速度誤差
- 3) 姿勢角誤差
- 4) 方位角誤差
- 5) 慣性センサの誤差

に分けて誤差方程式の導出をおこなう。

1) 位置誤差方程式

INS 航法演算において緯度、経度は座標変換行列 T_E^C から求める。よって、位置誤差 (δr_L) は C 座標系と E 座標系との座標変換行列の誤差 δT_E^C と考えることができる。しかし、移動アライメントの前提条件を考慮すると、方位角誤差 ($\delta\alpha$) が大きいために α の回転によって求められる座標系 (C' 座標系) が真の C 座標系に比べて大きくずれていると考えられる。したがって、大きな誤差を含んだ座標変換行列 \bar{T}_E^C を局地水平面が X 、 Y 軸まわりに微小な傾きを持ち、 Z 軸まわりに大きくずれた C 座標系に変換する座標変換行列としてモデル化する。なお、演算によって求まるものは \bar{T} 、真とするものは T 、その誤差は δT として表す。そこで、 \bar{T}_E^C は

$$\begin{aligned}\bar{T}_E^C &= \bar{T}_L^C \bar{T}_E^L \\ &= (T_L^C + \delta T_L^C) \{I - (\delta r_L \times)\} T_E^L\end{aligned}\tag{4.3.4-1}$$

と考えることができる。ここで、 $(\delta r_L \times)$ はベクトル $\delta r_L = [\delta r_{L,x} \quad \delta r_{L,y} \quad 0]^T$ の要素によって決まる歪対称行列である。次に、式(4.3.4-1)より δT_E^C は

$$\begin{aligned}
\delta T_E^C &= \bar{T}_E^C - T_E^C \\
&= (T_L^C + \delta T_L^C) \{I - (\delta r_L \times)\} T_E^L - T_L^C T_E^L \\
&= \left[\delta T_L^C \{I - (\delta r_L \times)\} - T_L^C (\delta r_L \times) \right] T_E^L
\end{aligned} \tag{4.3.4-2}$$

となる。ここで式(4.3.4-2)において、位置誤差の要因となる行列を位置誤差行列 \mathbf{E} とし、 $\sin \delta\alpha$ 、 $(\cos \delta\alpha - 1)$ を γ 、 β として表すと δT_E^C は

$$\begin{aligned}
\delta T_E^C &= \mathbf{E} T_E^L \\
&= \begin{bmatrix} (\beta) \cos \alpha - (\gamma) \sin \alpha & -(\beta) \sin \alpha - (\gamma) \cos \alpha & (\beta+1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x} \\ -(\beta) \sin \alpha - (\gamma) \cos \alpha & -(\beta) \cos \alpha + (\gamma) \sin \alpha & -(\beta+1) \delta r_{C,x} - (\gamma) \delta r_{C,y} \\ -\delta r_{L,y} & \delta r_{L,x} & 0 \end{bmatrix} T_E^L
\end{aligned} \tag{4.3.4-3}$$

となる。ここで、式(4.3.4-3)の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}
\delta \dot{T}_E^C &= \mathbf{E} \dot{T}_E^L + \dot{\mathbf{E}} T_E^L \\
&= \dot{\mathbf{E}} T_E^L - \mathbf{E} (\rho_{E/L}^L \times) T_E^L \\
&= \{ \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{E} (\rho_{E/L}^L \times) \} T_E^L
\end{aligned} \tag{4.3.4-4}$$

となる。ここで、 $(\rho_{E/L}^L \times)$ は L 座標系における(上添字)、 E 座標系に対する L 座標系(下添字)の相対角速度ベクトルの要素で決まる歪対称行列とする。次に、 δT_E^C を以下のように考えると

$$\begin{aligned}
\delta T_E^C &= \bar{T}_E^C - T_E^C \\
&= -(\bar{\rho}_{E/C}^C \times) \bar{T}_E^C + (\rho_{E/C}^C \times) T_E^C \\
&= \left[-(\bar{\rho}_{E/C}^C \times) \{ (T_L^C + \delta T_L^C) (I - (\delta r_L \times)) \} + (\rho_{E/C}^C \times) T_L^C \right] T_E^L
\end{aligned} \tag{4.3.4-5}$$

となる。よって式(4.3.4-4)と式(4.3.4-5)より位置誤差行列 \mathbf{E} は

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{E} (\rho_{E/L}^L \times) - (\bar{\rho}_{E/C}^C \times) \left[(T_L^C + \delta T_L^C) \{I - (\delta r_L \times)\} \right] + (\rho_{E/C}^C \times) T_L^C \\
&= \mathbf{E} (\rho_{E/L}^L \times) - (\bar{\rho}_{E/C}^C \times) (T_L^C + \mathbf{E}) + (\rho_{E/C}^C \times) T_L^C
\end{aligned} \tag{4.3.4-6}$$

となり、位置に関する誤差方程式を導くことができた。ここで、

$$\rho_{E/L}^L \times = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_{L,z} & \rho_{L,y} \\ \rho_{L,z} & 0 & -\rho_{L,x} \\ -\rho_{L,y} & \rho_{L,x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_{E/C}^C \times = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_{C,z} & \rho_{C,y} \\ \rho_{C,z} & 0 & -\rho_{C,x} \\ -\rho_{C,y} & \rho_{C,x} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.4-7}$$

であり、これまでの座標変換行列と同様に $(\delta \rho \times) = (\bar{\rho} \times) - (\rho \times)$ として考えることができるので、式(4.3.4-6)を展開することで

$$\begin{aligned}\delta r_{C,x} &= \delta r_{C,y} \{(\beta+1)\rho_{C,x} + (\gamma)\rho_{C,y}\} \{(\beta+1)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} \\ &\quad - \bar{\rho}_{C,y} \delta r_{C,y} \{(\beta+1)\delta r_{C,x} + (\gamma)\delta r_{C,y}\} - (\gamma)\bar{\rho}_{C,y} + (\beta)\rho_{C,x} + (\beta+1)\delta\rho_{C,x}\end{aligned}\quad (4.3.4-8)$$

$$\begin{aligned}\delta r_{C,y} &= -\delta r_{C,x} \{(\beta+1)\rho_{C,x} + (\gamma)\rho_{C,y}\} \{(\beta+1)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} \\ &\quad + \bar{\rho}_{C,y} \delta r_{C,x} \{(\beta+1)\delta r_{C,x} + (\gamma)\delta r_{C,y}\} + (\gamma)\bar{\rho}_{C,x} + (\beta)\rho_{C,y} + (\beta+1)\delta\rho_{C,y}\end{aligned}\quad (4.3.4-9)$$

となる。ただし、ストラップダウン方式では $\rho_{C,z} = 0$ とする。また、 $\delta\rho_{C,x}$ 、 $\delta\rho_{C,y}$ は

$$\delta\rho_{C,x} = -\frac{\delta v_{C,y}}{R_x + h} + \frac{v_{C,y}}{(R_x + h)^2} \delta h \quad (4.3.4-10)$$

$$\delta\rho_{C,y} = \frac{\delta v_{C,x}}{R_y + h} - \frac{v_{C,x}}{(R_y + h)^2} \delta h \quad (4.3.4-11)$$

として考えることができるので、

$$\begin{aligned}\delta r_{C,x} &= \delta r_{C,y} \{(\beta+1)\rho_{C,x} + (\gamma)\rho_{C,y}\} \{(\beta+1)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} \\ &\quad - \left\{ \rho_{C,y} + \left(\frac{\delta v_{C,x}}{R_y + h} - \frac{v_{C,x}}{(R_y + h)^2} \delta h \right) \right\} \delta r_{C,y} \{(\beta+1)\delta r_{C,x} + (\gamma)\delta r_{C,y}\} \\ &\quad - \left\{ \rho_{C,y} + \left(\frac{\delta v_{C,x}}{R_y + h} - \frac{v_{C,x}}{(R_y + h)^2} \delta h \right) \right\} (\gamma) + (\beta)\rho_{C,x} \\ &\quad + \left(-\frac{\delta v_{C,y}}{R_x + h} + \frac{v_{C,y}}{(R_x + h)^2} \delta h \right) (\beta+1) + u_{r,x}\end{aligned}\quad (4.3.4-12)$$

$$\begin{aligned}\delta r_{C,y} &= -\delta r_{C,x} \{(\beta+1)\rho_{C,x} + (\gamma)\rho_{C,y}\} \{(\beta+1)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} \\ &\quad + \left\{ \rho_{C,y} + \left(\frac{\delta v_{C,x}}{R_y + h} - \frac{v_{C,x}}{(R_y + h)^2} \delta h \right) \right\} \delta r_{C,x} \{(\beta+1)\delta r_{C,x} + (\gamma)\delta r_{C,y}\} \\ &\quad + \left\{ \rho_{C,x} - \left(\frac{\delta v_{C,y}}{R_x + h} - \frac{v_{C,y}}{(R_x + h)^2} \delta h \right) \right\} (\gamma) + (\beta)\rho_{C,y} \\ &\quad + \left(\frac{\delta v_{C,x}}{R_y + h} - \frac{v_{C,x}}{(R_y + h)^2} \delta h \right) (\beta+1) + u_{r,y}\end{aligned}\quad (4.3.4-13)$$

となる。また、Z 軸方向の位置誤差(高度誤差)は次式のようになる。

$$\delta h = \delta v_{C,z} + u_{r,z} \quad (4.3.4-14)$$

以上、(4.3.4-12)、(4.3.4-13)、(4.3.4-14)式が位置誤差に関する方程式となる。ただし、 $u_{r,x}$ 、 $u_{r,y}$ 、 $u_{r,z}$ はモデル化されていない誤差を表すもので、ここでは互いに無相関な平均 0、分散 $U_{r,x}$ 、 $U_{r,y}$ 、 $U_{r,z}$ の正規性白色雑音と仮定する。

2) 速度誤差方程式

INS 速度を求める基本方程式から

$$\dot{v}_C = f_C - (\rho_C + 2\Omega_C) \times v_C + g_C \quad (4.3.4-15)$$

として移動体の速度が求まる。ここで、 f は specific force と呼ばれるもので重力を除いた慣性系に対する移動体に生じる加速度のことであり、 g は重力加速度を表す。また、 Ω_C は地球自転角速度ベクトル $\Omega_E (= [0 \ 0 \ \Omega])$ を C 座標系で表したものである。しかしながら、演算速度 \bar{v}_C は姿勢角、方位角の初期値を決定しないため誤差を含んでいるものと考えられるので速度誤差を考慮する際の誤差を含んだ specific force (\bar{f}_C) と重力加速度 (\bar{g}_C) は次のように表すことができる。

$$\bar{f}_C = [I - (\delta\theta_C \times)] f_C + \delta f_C \quad (4.3.4-16)$$

$$\bar{g}_C = g_C + \delta g_C \quad (4.3.4-17)$$

ただし δf_C は加速度センサ誤差であり、 $\delta f_C = b_C$ とする。また、式(4.3.4-17)の C 座標系における重力は $g_C = [0 \ 0 \ -g]^T$ のベクトルで表現できる。また、 δg_C は、真の C 座標系に対し微小な角度誤差 $\delta\theta_{C,x}$ 、 $\delta\theta_{C,y}$ 、 $(\delta\theta_{C,z} = 0)$ がある場合に発生する重力加速度誤差として考えると

$$\delta g_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\delta\theta_{C,y} \\ 0 & 1 & \delta\theta_{C,x} \\ \delta\theta_{C,y} & -\delta\theta_{C,x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\delta\theta_{C,y} \\ -g\delta\theta_{C,x} \\ -g \end{bmatrix} \quad (4.3.4-18)$$

として、 X 、 Y 軸それぞれの重力加速度誤差は $g\delta\theta_{C,y}$ 、 $-g\delta\theta_{C,x}$ として表すことができる。なお、 $\delta\alpha$ 軸に関しては重力加速度誤差は発生しない。これより、移動アライメント時の演算速度 \bar{v}_C は

$$\begin{aligned} \bar{v}_C &= [I - (\delta\theta_C \times)] f_C + b_C + g_C + \delta g_C \\ &\quad - \{(\rho_C + \delta\rho_C) + 2(\Omega_C + \delta\Omega_C)\} \times (v_C + \delta v_C) \end{aligned} \quad (4.3.4-19)$$

として考えることができる。

以上より、移動アライメント時の速度誤差 $\delta\dot{v}_C$ は

$$\begin{aligned} \delta\dot{v}_C &= \bar{v}_C - \dot{v}_C \\ &= f_C \times \delta\theta_C + b_C + v_C \times (\delta\rho_C + 2\delta\Omega_C) - (\rho_C + 2\Omega_C) \times \delta v_C \\ &\quad - (\delta\rho_C + 2\delta\Omega_C) \times v_C + \delta g_C \end{aligned} \quad (4.3.4-20)$$

と示すことができる。これより、 X 軸速度誤差について整理すると

$$\begin{aligned} \delta\dot{v}_{C,x} &= -f_{C,z} \delta\theta_{C,y} + b_{C,x} - (\delta\rho_{C,y} + 2\delta\Omega_{C,y})(v_{C,z} + \delta v_{C,z}) - (\rho_{C,y} + 2\Omega_{C,y}) \delta v_{C,z} \\ &\quad + (\delta\rho_{C,z} + 2\delta\Omega_{C,z})(v_{C,y} + \delta v_{C,y}) + 2\Omega_{C,z} \delta v_{C,y} + g \delta\theta_{C,y} \end{aligned} \quad (4.3.4-21)$$

となる。ここで Z 軸の相対角速度誤差は(4.3.4-30)式より求まり、 X 、 Y 軸の相対角速度誤差は式(4.3.4-10)、(4.3.4-11)のようになる。また後述の式(4.3.4-26)より地球自転角速度誤差 $\delta\Omega_C$ を式(4.3.4-21)に代入すれば

$$\begin{aligned}
\delta \dot{v}_{C,x} = & - \left[\frac{\delta v_{C,x}}{R_y + h} - \frac{v_{C,x}}{(R_y + h)^2} \delta h - 2\Omega_{L,x} \{ (\beta) \sin \alpha + (\gamma) \cos \alpha \} \right. \\
& \left. + 2\Omega_{C,z} \{ (\beta + 1) \delta r_{C,x} + (\gamma) \delta r_{C,y} \} \right] (v_{C,z} + \delta v_{C,z}) \\
& + \left\{ -\Omega_{C,y} \delta r_{C,x} + \Omega_{C,x} \delta r_{C,y} - \delta \theta_{C,x} (\rho_{C,y} + \Omega_{C,y}) \right. \\
& \left. + \delta \theta_{C,y} (\rho_{C,x} + \Omega_{C,x}) - d_{C,z} \right\} (v_{C,y} + \delta v_{C,y}) \\
& - (\rho_{C,y} + 2\Omega_{C,y}) \delta v_{C,z} + 2\Omega_{C,z} \delta v_{C,y} - f_{C,z} \delta \theta_{C,y} + b_{C,x} + g \delta \theta_{C,y} + u_{v,x}
\end{aligned} \tag{4.3.4-22}$$

を得る。同様にして Y 、 Z 軸の速度誤差も導出し、以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
\delta \dot{v}_{C,y} = & \left[\frac{v_{C,y}}{(R_x + h)^2} \delta h - \frac{\delta v_{C,y}}{R_x + h} + 2\Omega_{L,x} \{ (\beta) \cos \alpha - (\gamma) \sin \alpha \} \right. \\
& \left. - 2\Omega_{C,z} \{ (\beta + 1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x} \} \right] (v_{C,z} + \delta v_{C,z}) \\
& - \left\{ -\Omega_{C,y} \delta r_{C,x} + \Omega_{C,x} \delta r_{C,y} - \delta \theta_{C,x} (\rho_{C,y} + \Omega_{C,y}) \right. \\
& \left. + \delta \theta_{C,y} (\rho_{C,x} + \Omega_{C,x}) - d_{C,z} \right\} (v_{C,x} + \delta v_{C,x}) \\
& + (\rho_{C,x} + 2\Omega_{C,x}) \delta v_{C,z} - 2\Omega_{C,z} \delta v_{C,x} + f_{C,z} \delta \theta_{C,x} + b_{C,y} - g \delta \theta_{C,x} + u_{v,y}
\end{aligned} \tag{4.3.4-23}$$

$$\begin{aligned}
\delta \dot{v}_{C,z} = & \left[\frac{\delta v_{C,x}}{R_y + h} - \frac{v_{C,x}}{(R_y + h)^2} \delta h - 2\Omega_{L,x} \{ (\beta) \sin \alpha + (\gamma) \cos \alpha \} \right. \\
& \left. + 2\Omega_{C,z} \{ (\beta + 1) \delta r_{C,x} + (\gamma) \delta r_{C,y} \} \right] (v_{C,x} + \delta v_{C,x}) \\
& + \left[\frac{\delta v_{C,y}}{R_x + h} - \frac{v_{C,y}}{(R_x + h)^2} \delta h - 2\Omega_{L,x} \{ (\beta) \cos \alpha - (\gamma) \sin \alpha \} \right. \\
& \left. + 2\Omega_{C,z} \{ (\beta + 1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x} \} \right] (v_{C,y} + \delta v_{C,y}) \\
& + (\rho_{C,y} + 2\Omega_{C,y}) \delta v_{C,x} - (\rho_{C,x} + 2\Omega_{C,x}) \delta v_{C,y} + f_{C,x} \delta \theta_{C,y} - f_{C,y} \delta \theta_{C,x} + b_{C,z} + u_{v,z}
\end{aligned} \tag{4.3.4-24}$$

以上、式(4.3.4-22)、(4.3.4-23)、(4.3.4-24)が速度誤差に関する方程式となる。ただし、 $u_{v,x}$ 、 $u_{v,y}$ 、 $u_{v,z}$ はモデル化されていない誤差を表すもので、ここでは互いに無相関な平均0、分散 $U_{v,x}$ 、 $U_{v,y}$ 、 $U_{v,z}$ の正規性白色雑音と仮定する。

3) 姿勢角誤差方程式

姿勢角誤差は C 座標系と B 座標系の関係を与える角度の誤差として考える。すなわち、ロール角、ピッチ角、ヨー角のずれを姿勢角誤差 $\delta \theta = [\delta \theta_{C,x} \quad \delta \theta_{C,y} \quad \delta \theta_{C,z}]^T$ として考える。

ただし、前述したように Z 軸まわりの Yaw 角誤差 $\delta\theta_{C,z}$ は、wander angle 誤差 $\delta\alpha$ に比べて小さいので無視する。そこで姿勢角誤差は C 座標系を局地水平に保つための地球に対する相対角速度、地球自転角速度の補正誤差、そしてジャイロのバイアス誤差により生ずるとし

$$\delta\dot{\theta}_C = \delta\rho_{E/C}^C + \delta\Omega_C + \delta\theta_C \times \omega_{I/C}^C + d_C \quad (4.3.4-25)$$

を姿勢角の誤差方程式とする。ここで、 d_C はジャイロのバイアス誤差とし、 $d_C = [d_{C,x} \ d_{C,y} \ d_{C,z}]^T$ とする。また、 $\Omega_L (= [\Omega_{L,x} \ \Omega_{L,y} \ \Omega_{L,z}]^T)$ は L 座標系で表した地球自転角速度であり

$$\begin{aligned} \delta\Omega_C &= \bar{\Omega}_C - \Omega_C = \delta T_E^C \Omega_E \\ &= E T_E^L \Omega_E = E \Omega_L = E \begin{bmatrix} \Omega_{L,x} \\ \Omega_{L,y} \\ \Omega_{L,z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega_{L,x} \{(\beta)\cos\alpha - (\gamma)\sin\alpha\} + \Omega_{L,z} \{(\beta+1)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} \\ -\Omega_{L,x} \{(\beta)\sin\alpha + (\gamma)\cos\alpha\} - \Omega_{L,z} \{(\beta+1)\delta r_{C,x} + (\gamma)\delta r_{C,y}\} \\ (\delta r_{C,x} \sin\alpha + \delta r_{C,y} \cos\alpha) \Omega_{L,x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.4-26)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \delta\theta_C \times \omega_{I/C}^C &= \begin{bmatrix} \delta\theta_{C,x} \\ \delta\theta_{C,y} \\ \delta\theta_{C,z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho_{C,x} + \Omega_{C,x} \\ \rho_{C,y} + \Omega_{C,y} \\ \rho_{C,z} + \Omega_{C,z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega_{C,z} \delta\theta_{C,y} \\ -\Omega_{C,z} \delta\theta_{C,x} \\ (\rho_{C,y} + \Omega_{C,y}) \delta\theta_{C,x} - (\rho_{C,x} + \Omega_{C,x}) \delta\theta_{C,y} \end{bmatrix}, \quad (\delta\theta_{C,z} \cong 0) \end{aligned} \quad (4.3.4-27)$$

となる。これより、式(5-4.2.26)、(5-4.2.27)を式(5-4.2.25)に代入することにより、姿勢角誤差方程式を得る。

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}_{C,x} &= \Omega_{L,x} \{(\beta)\cos\alpha - (\gamma)\sin\alpha\} + \Omega_{L,z} \{(\beta+1)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} \\ &\quad + \frac{v_{C,y}}{(R_x+h)^2} \delta h - \frac{\delta v_{C,y}}{R_x+h} + \Omega_{C,z} \delta\theta_{C,y} + d_{C,x} + u_{\theta,x} \end{aligned} \quad (5-4.2.28)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}_{C,y} &= -\Omega_{L,z} \{(\beta+1)\delta r_{C,x} + (\gamma)\delta r_{C,y}\} - \Omega_{L,x} \{(\beta)\sin\alpha + (\gamma)\cos\alpha\} \\ &\quad - \frac{v_{C,x}}{(R_y+h)^2} \delta h + \frac{\delta v_{C,x}}{R_y+h} - \Omega_{C,z} \delta\theta_{C,x} + d_{C,y} + u_{\theta,y} \end{aligned} \quad (4.3.4-29)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}_{C,z} &= \delta\rho_{C,z} + (\delta r_{C,x} \sin \alpha + \delta r_{C,y} \cos \alpha) \Omega_{L,x} \\ &\quad + (\rho_{C,y} + \Omega_{C,y}) \delta\theta_{C,x} - (\rho_{C,x} + \Omega_{C,x}) \delta\theta_{C,y} + d_{C,z} \\ &\cong 0 \end{aligned} \quad (4.3.4-30)$$

ただし、 $u_{\theta,x}$ 、 $u_{\theta,y}$ はモデル化されていない誤差を表すもので、ここでは互いに無相関な平均 0、分散 $U_{\theta,x}$ 、 $U_{\theta,y}$ の正規性白色雑音と仮定する。

4) 方位角誤差方程式

方位角誤差に関する誤差方程式は、位置誤差方程式と同様に式(5-4-6)から導くことができる。ここで、位置誤差行列 \mathbf{E} を

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} (\beta) \cos \alpha - (\gamma) \sin \alpha & -(\beta) \sin \alpha - (\gamma) \cos \alpha & (\beta+1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x} \\ -(\beta) \sin \alpha - (\gamma) \cos \alpha & -(\beta) \cos \alpha + (\gamma) \sin \alpha & -(\beta+1) \delta r_{C,x} - (\gamma) \delta r_{C,y} \\ -\delta r_{L,y} & \delta r_{L,x} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B & (\beta+1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x} \\ B & -A & -(\beta+1) \delta r_{C,x} - (\gamma) \delta r_{C,y} \\ -\delta r_{L,y} & \delta r_{L,x} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.4-31)$$

とする。ここで、式(5-4-6)の左辺 $\dot{\mathbf{E}}$ を導出するにあたり \dot{A} 、 \dot{B} は

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\dot{\alpha}(\beta) \sin \alpha + (\dot{\beta}) \cos \alpha - \dot{\alpha}(\gamma) \cos \alpha - (\dot{\gamma}) \sin \alpha zsd \\ &= -\dot{\alpha}\{(\beta) \sin \alpha + (\gamma) \cos \alpha\} + (\dot{\beta}) \cos \alpha - (\dot{\gamma}) \sin \alpha \\ &= \dot{\alpha}B + (\dot{\beta}) \cos \alpha - (\dot{\gamma}) \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.3.4-32)$$

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -\dot{\alpha}(\beta) \cos \alpha - (\dot{\beta}) \sin \alpha + \dot{\alpha}(\gamma) \sin \alpha - (\dot{\gamma}) \cos \alpha \\ &= -\dot{\alpha}\{(\beta) \cos \alpha - (\gamma) \sin \alpha\} - (\dot{\beta}) \sin \alpha - (\dot{\gamma}) \cos \alpha \\ &= -\dot{\alpha}A - (\dot{\beta}) \sin \alpha - (\dot{\gamma}) \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.3.4-33)$$

となる。また、 \mathbf{E} の右辺は ($\rho_{C,z} = 0$) とし、 Z 軸の相対角速度 $\rho_{L,z}$ は方位角の時間微分要素 $\dot{\alpha}$ と考えることができることより

$$\begin{aligned} \dot{A} &= B\rho_{L,z} - \rho_{L,y} \{(\beta+1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x}\} \\ &\quad - \delta\rho_{C,z} \{(\beta+1) \sin \alpha + (\gamma) \cos \alpha\} + \bar{\rho}_{C,y} \delta r_{L,y} \\ &= B\dot{\alpha} - \rho_{L,y} \{(\beta+1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x}\} \\ &\quad - \delta\rho_{C,z} \{(\beta+1) \sin \alpha + (\gamma) \cos \alpha\} + \bar{\rho}_{C,y} \delta r_{L,y} \end{aligned} \quad (4.3.4-34)$$

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -A\rho_{L,z} + \rho_{L,x} \{(\beta+1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x}\} \\ &\quad + \delta\rho_{C,z} \{-(\beta+1) \cos \alpha + (\gamma) \sin \alpha\} - \bar{\rho}_{C,y} \delta r_{L,x} \\ &= -A\dot{\alpha} + \rho_{L,x} \{(\beta+1) \delta r_{C,y} - (\gamma) \delta r_{C,x}\} \\ &\quad + \delta\rho_{C,z} \{-(\beta+1) \cos \alpha + (\gamma) \sin \alpha\} - \bar{\rho}_{C,y} \delta r_{L,x} \end{aligned} \quad (4.3.4-35)$$

となる。ここで、式(4.3.4-34)の両辺に $\cos \alpha$ を、式(4.3.4-35)の両辺に $\sin \alpha$ を乗じ、互いを差し引くことにより

$$\dot{\beta} = \rho_{C,y} \{(\beta)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} - (\gamma)\delta \rho_{C,z} - \delta \rho_{C,y} \delta r_{C,y} \quad (4.3.4-36)$$

を得る。また、同様にして式(4.3.4-34)の両辺に $\sin \alpha$ を、式(5-4-35)の両辺に $\cos \alpha$ を乗じ、互いを加えることにより

$$\dot{\gamma} = -\rho_{C,x} \{(\beta+1)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} + (\beta+1)\delta \rho_{C,z} + \bar{\rho}_{C,y} \delta r_{C,x} \quad (4.3.4-37)$$

を得る。一方、 $\delta \rho_{C,z}$ は式(4.3.4-30)より求められるので、式(4.3.4-36)、(4.3.4-37)に代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & \rho_{C,y} \{(\beta)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} \\ & + \{(\delta r_{C,x} \sin \alpha + \delta r_{C,y} \cos \alpha)\Omega_{L,x} + (\rho_{C,y} + \Omega_{C,y})\delta \theta_{C,x} \\ & - (\rho_{C,x} + \Omega_{C,x})\delta \theta_{C,y} + d_{C,z}\}(\gamma) - \delta \rho_{C,y} \delta r_{C,y} + u_{\beta} \end{aligned} \quad (4.3.4-38)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & -\rho_{C,x} \{(\beta+1)\delta r_{C,y} - (\gamma)\delta r_{C,x}\} - \{(\delta r_{C,x} \sin \alpha + \delta r_{C,y} \cos \alpha)\Omega_{L,x} \\ & + (\rho_{C,y} + \Omega_{C,y})\delta \theta_{C,x} - (\rho_{C,x} + \Omega_{C,x})\delta \theta_{C,y} + d_{C,z}\}(\beta+1) \\ & + \left\{ \rho_{C,y} + \left(\frac{\delta v_{C,x}}{R_y + h} - \frac{v_{C,x}}{(R_y + h)^2} \delta h \right) \right\} \delta r_{C,x} + u_{\gamma} \end{aligned} \quad (4.3.4-39)$$

以上、式(4.3.4-38)、(4.3.4-39)が方位角誤差に関する方程式となる。ただし、 u_{β} 、 u_{γ} はモデル化されていない誤差を表すもので、ここでは互いに無相関な平均0、分散 U_{β} 、 U_{γ} の正規性白色雑音とする。また、それら β 、 γ を用いて方位角誤差 $\delta \alpha$ は

$$\delta \alpha = \tan^{-1} \frac{\sin \delta \alpha}{1 + (\cos \delta \alpha - 1)} \quad (4.3.4-40)$$

として求めることができる。

5) 慣性センサの誤差モデル

加速度センサ、ジャイロの誤差は共に強い自己相関をもつ量と考えられる。したがって慣性センサの誤差を、各軸成分がそれぞれ指数関数で表されるような自己相関を持つ有色雑音として取り扱い、1次のマルコフ過程としてモデル化し以下のように表現する。

$$b_{B,x} = -\frac{1}{\tau_b} b_{B,x} + u_{b,x} \quad (4.3.4-41)$$

$$b_{B,y} = -\frac{1}{\tau_b} b_{B,y} + u_{b,y} \quad (4.3.4-42)$$

$$b_{B,z} = -\frac{1}{\tau_b} b_{B,z} + u_{b,z} \quad (4.3.4-43)$$

$$d_{B,x} = -\frac{1}{\tau_d} d_{B,x} + u_{d,x} \quad (4.3.4-44)$$

$$d_{B,y} = -\frac{1}{\tau_d} d_{B,y} + u_{d,y} \quad (4.3.4-45)$$

$$d_{B,z} = -\frac{1}{\tau_d} d_{B,z} + u_{d,z} \quad (4.3.4-46)$$

ただし、 $u_{b,x}, \dots, u_{d,z}$ は互いに無相関で、平均 0、分散 $U_{b,x}, \dots, U_{d,z}$ の正規性白色雑音であり、 τ_b 、 τ_d は相関時間である。

4.3.5 位置オフセット処理

実環境において、慣性航法複合演算を実施する際、GPS アンテナと IIM の座標の違いによるオフセットを考慮しなくてはならない。慣性航法複合演算における Loosely Coupled 方式は GPS の位置、速度と IMU の位置、速度を用いて観測量を計算するため、GPS、IMU それぞれの座標を統一する必要がある。ここでは、IMU と GPS アンテナの設置箇所による座標の違い（位置オフセット）に対し、補正を行う手法について説明する。

(1) 機能

GPS アンテナと IMU の位置オフセット量から GPS の位置を IMU の位置へ補正する。

(2) アルゴリズム

位置オフセットの概略図を図 4.3.5-1 に示す。

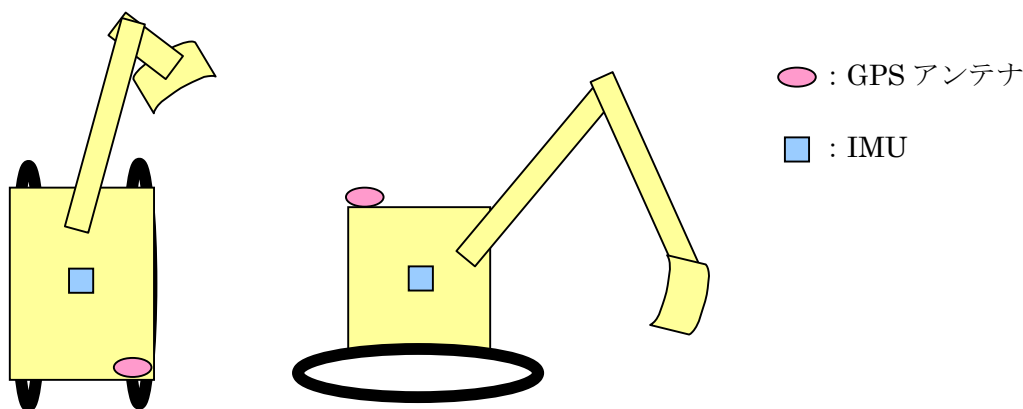


図 4.3.5-1 IMU と GPS アンテナの物理的オフセット

(左図：上から見た図、右図：横から見た図)

1) 初期設定

IMU の ENU 座標を $[0,0,0]^T$ とし、ロール角 Ψ 、ピッチ角 Ξ 、方位角 Φ がそれぞれ 0 [deg] であった場合の GPS アンテナ箇所における物理的オフセット量を求める。水平方向に対して東方向に m [m]、南方向に n [m]、鉛直高さ方向に h [m] とすると GPS アンテナの ENU 座標は $[m,-n,h]^T$ となる。また、静止している状態で IMU に角速度 $\underline{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ だけ印加されると、機体座標系での IMU の速度は $\underline{v}_i = [0,0,0]^T$ であり、角速度による GPS アンテナにおける速度は $\underline{v}_g^\omega = \underline{\omega} \times \underline{s}^g$ (\times : 外積) となる。

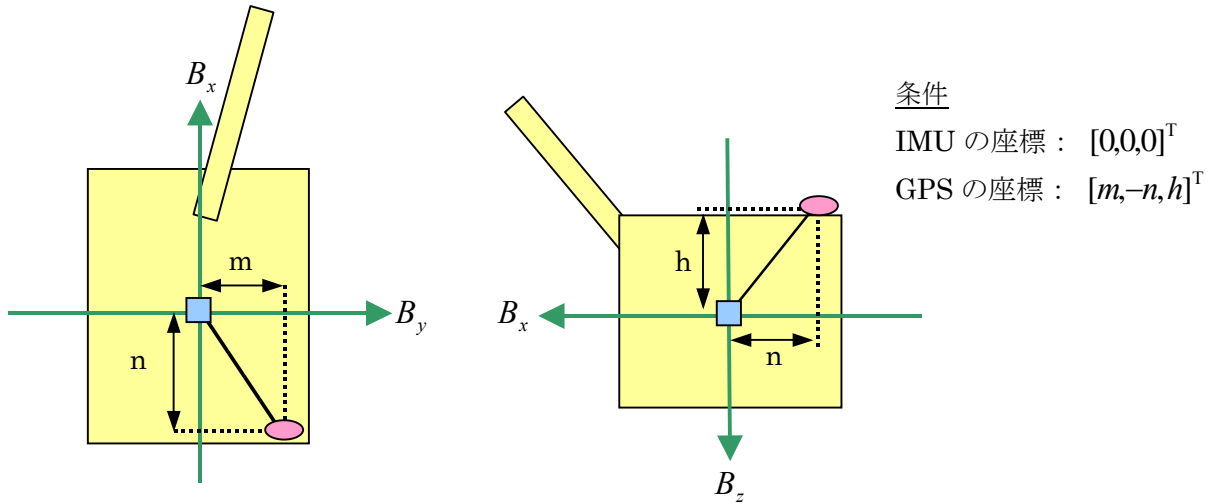


図 4.3.5-2 オフセットパラメータの詳細

(左図：上方より見た図、右図：側面より見た図)

2) GPS アンテナの座標からの IMU 座標での GPS 位置の算出

IMU における真の角度 (ロール角 Ψ 、ピッチ角 Θ 、方位角 Φ) を用いて機体座標 (B_x, B_y, B_z) から局地平面 (ENU) 座標 (L_x, L_y, L_z) への座標変換は

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} T_B^L \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad (4.3.5-1)$$

となる。ここで、 T_B^L は、機体座標 (B_x, B_y, B_z) から局地水平面 (NED) 座標 (L'_x, L'_y, L'_z) への座標変換行列であり、以下の式で表される。

$$T_B^L = \begin{bmatrix} \cos\Theta\cos\Phi & \sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi & \cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Phi \\ \cos\Theta\sin\Phi & \sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi & \cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi - \sin\Psi\cos\Phi \\ -\sin\Theta & \sin\Psi\cos\Theta & \cos\Psi\cos\Theta \end{bmatrix} \quad (4.3.5-2)$$

よって、IMU 座標における GPS 座標は物理的オフセット量 $(B_x, B_y, B_z) = (-n, m, -h)$ を用いて

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} T_B^L \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad (4.3.5-3)$$

となる。

3) GPS アンテナでの速度から IMU 座標での GPS 速度の算出

GPS アンテナでの速度 $[v_g^E, v_g^N, v_g^U]^T$ が与えられているとき、IMU 座標における GPS アンテナ

の速度 $\underline{v}_i = [v_i^E, v_i^N, v_i^U]^T$ は、IMU の角速度と物理的オフセット量により以下の関係式となる。

$$\underline{v}_i = \begin{bmatrix} v_i^E \\ v_i^N \\ v_i^U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_g^E \\ v_g^N \\ v_g^U \end{bmatrix} - T_B^L \underline{v}_g^\omega = \begin{bmatrix} v_g^E \\ v_g^N \\ v_g^U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} T_B^{L'} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -n \\ m \\ -h \end{bmatrix} \quad (4.3.5-4)$$

4.3.6 Loosely coupled 方式

慣性航法複合演算において、慣性航法演算の誤差を補正する手法の Loosely coupled 方式について説明する。

(1) 機能

Loosely coupled 方式のモデル式を算出する。

(2) アルゴリズム

4.3.4 において、INS の航法誤差に関する方程式が得られ、Loosely coupled 方式の INS 航法誤差を表 4.3.6-1 に示す。慣性航法複合演算における Loosely coupled 方式は表 4.3.6-1 に示した INS の航法誤差を、GPS の位置と速度を用いて推定し補正する。

表 4.3.6-1 Loosely coupled 方式の状態変数

1. $\delta r_{C,x}$: X_C 軸まわりの位置誤差	9. $b_{B,x}$: X_B 軸加速度バイアス
2. $\delta r_{C,y}$: Y_C 軸まわりの位置誤差	10. $b_{B,y}$: Y_B 軸加速度バイアス
3. $\delta v_{C,x}$: X_C 軸方向の速度誤差	11. $b_{B,z}$: Z_B 軸加速度バイアス
4. $\delta v_{C,y}$: Y_C 軸方向の速度誤差	12. $d_{B,x}$: X_B 軸ジャイロバイアス
5. $\delta \theta_{C,x}$: X_C 軸まわりの姿勢角誤差	13. $d_{B,y}$: Y_B 軸ジャイロバイアス
6. $\delta \theta_{C,y}$: Y_C 軸まわりの姿勢角誤差	14. $d_{B,z}$: Z_B 軸ジャイロバイアス
7. δh : Z_C 軸方向の高度誤差	15. γ : $\sin \delta \alpha$
8. $\delta v_{C,z}$: Z_C 軸方向の速度誤差	16. β : $(\cos \delta \alpha - 1)$

Loosely coupled 方式は図 4.3.6-1 に示すような構成であり、GPS の測位結果（位置、速度）を用い、表 4.3.6-1 の各変数を推定する。以下では Loosely coupled 方式における状態方程式および観測方程式を示す。

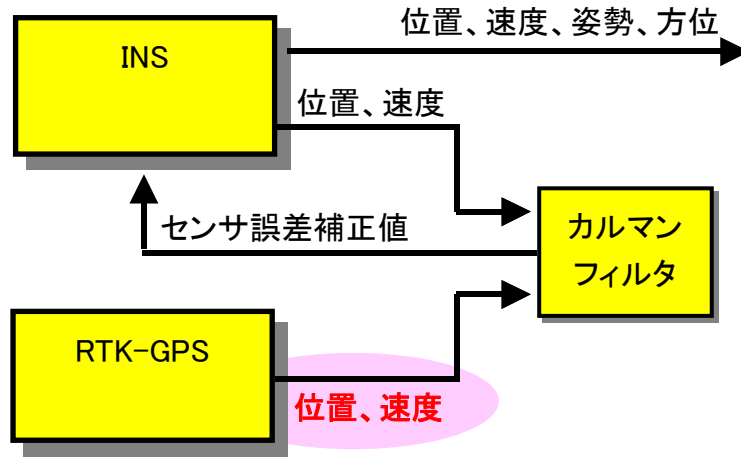


図 4.3.6-1 Loosely coupled 方式のシステム構成

1) 状態方程式 (Loosely 方式)

表 4.3.6-1 に示した INS の位置誤差、速度誤差、姿勢角誤差、方位角誤差、及び慣性センサのバイアス誤差を状態変数とし、状態ベクトルを次のように定義する。

$$x_L \equiv [\delta r_{C,x} \ \delta r_{C,y} \ \delta r_{C,z} \ \delta v_{C,x} \ \delta v_{C,y} \ \delta \theta_{C,x} \ \delta \theta_{C,y} \ \delta h \ b_{B,x} \ b_{B,y} \ b_{B,z} \ d_{B,x} \ d_{B,y} \ d_{B,z} \ \gamma \ \beta]^T$$

したがって、 x_L を用いると連続時間の状態方程式は

$$\dot{x}_L(t) = \tilde{f}(x_L(t), t) + u_L(t) \quad (4.3.6-1)$$

の形で表すことができる。ただし、関数 \tilde{f} は 0 項に示した INS の航法誤差に関する方程式から定まる既知のベクトル関数である。また、 $u_L(t)$ は 16 次元の正規性白色雑音ベクトルであり

$$u_L(t) \equiv [u_{r,x}(t) \ u_{r,y}(t) \ u_{v,x}(t) \ u_{v,y}(t) \ u_{\theta,x}(t) \ u_{\theta,y}(t) \ u_h(t) \ u_{v,z}(t) \\ u_{b,x}(t) \ u_{b,y}(t) \ u_{b,z}(t) \ u_{d,x}(t) \ u_{d,y}(t) \ u_{d,z}(t) \ u_\gamma(t) \ u_\beta(t)]^T$$

$$E[u_L(t)] = 0$$

$$E[u_L(t)u_L^T(t)] \equiv U_L(t) \\ = \text{diag} \{ U_{r,x}(t), U_{r,y}(t), U_{v,x}(t), U_{v,y}(t), U_{\theta,x}(t), \\ U_{\theta,y}(t), U_h(t), U_{v,z}(t), U_{b,x}(t), U_{b,y}(t), \\ U_{b,z}(t), U_{d,x}(t), U_{d,y}(t), U_{d,z}(t), U_\gamma(t), U_\beta(t) \}$$

とする。ここで、式(4.3.6-1)を観測データである GPS 信号の更新間隔 Δt でオイラー近似し離散化すると

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_L(k+1) - x_L(k)}{\Delta t} = \tilde{f}(x_L(k), k) + u_L(k) \quad (4.3.6-2)$$

$$\begin{aligned}x_L(k+1) &= x_L(k) + \tilde{f}(x_L(k), k)\Delta t + q_L(k) \\ &\equiv f(x_L(k), k) + q_L(k)\end{aligned}\quad (4.3.6-3)$$

となり離散時間系の状態方程式が得られる。ただし、

$$q_L(k) \equiv u_L(k)\Delta t$$

$$f(x_L(k), k) = x_L(k) + \tilde{f}(x_L(k), k)\Delta t$$

である。また、 $q_L(k)$ は平均が0、共分散行列

$$\begin{aligned}E[q_L(k)q_L^T(k)] &\equiv Q_L(k) \\ &= \text{diag}\{Q_{r,x}(k), Q_{r,y}(k), Q_{v,x}(k), Q_{v,y}(k), Q_{\theta,x}(k), \\ &\quad Q_{\theta,y}(k), Q_h(k), Q_{v,z}(k), Q_{b,x}(k), Q_{b,y}(k), \\ &\quad Q_{b,z}(k), Q_{d,x}(k), Q_{d,y}(k), Q_{d,z}(k), Q_\gamma(k), Q_\beta(k)\}\end{aligned}$$

であるような正規性白色雑音ベクトルである。

2) 観測方程式

Loosely coupled 方式では GPS より得られる位置、速度と INS が出力する位置、速度との差を観測量として観測方程式を導出する。すなわち、

$$\text{INS演算誤差} = \text{INS演算値} - \text{GPS観測量}$$

として、INS 演算誤差を観測量とすることを考える。ただし、GPS 位置は E 座標系、GPS 速度は L 座標系で観測されるため、上記の関係に当てはめるには GPS 観測量を航法演算座標系である C 座標系に適切に変換する必要がある。そこで以下では、方位角が未知であるために生じる座標変換の誤差を考慮した位置、速度観測量について述べる。

ここで、INS から得られる諸量には” i ”、GPS から得られる諸量には” g ” を各変数の右肩に付加する。例えば、 $v_{C,x}^i$ は INS から得られる C 座標系での X 軸に関する速度である。また、GPS データは離散的に得られ、データ更新間隔は Δt とする。

(i) 位置誤差観測量

INS と GPS より得られる緯度 λ と経度 φ の差を位置誤差観測量とする。したがって、この位置誤差観測量を C 座標系に適切に変換する。まず、 E 座標系と L 座標系の関係について考える。 E 座標系での INS 演算の緯度誤差 $\Delta\lambda$ 、経度誤差 $\Delta\varphi$ は

$$\Delta\lambda = \lambda^i - \lambda^g \quad (4.3.6-4)$$

$$\Delta\varphi = \varphi^i - \varphi^g \quad (4.3.6-5)$$

として GPS 位置観測量を基準とすることで与えられる。

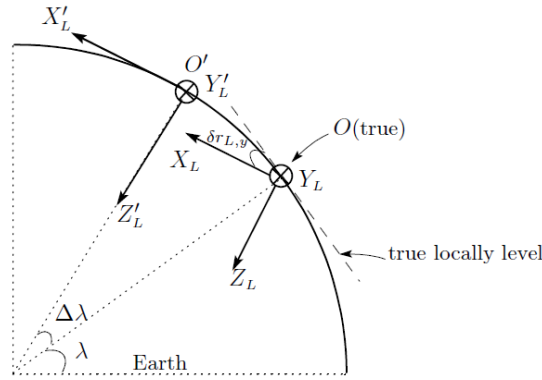


図 4.3.6-2 緯度誤差と $\delta r_{L,y}$ の関係

緯度誤差 $\Delta\lambda$ と $\delta r_{L,y}$ の関係を図 4.3.6-2 に示す。 $\Delta\lambda$ により、移動体の真の位置 O で E 座標系から L 座標系へ座標変換を行うと O' を原点とする L' 座標系 (X'_L 、 Y'_L 、 Z'_L) が構成される。しかし、この L' 座標系は実際の位置 O で構成されるべき L 座標系とは異なる。すなわち、緯度誤差が $+\Delta\lambda$ である場合、INS 演算によって構成される局地水平面 (L' 座標系) は、真の局地水平面に対して Y_L 軸まわりに関して、 $-\delta r_{L,y}$ だけ傾いてしまうことが分かる。したがって、次式の関係を得る。

$$\Delta\lambda = -\delta r_{L,y} \quad (4.3.6-6)$$

次に、経度誤差 $\Delta\phi$ が INS 演算によって構成される局地水平面に及ぼす影響について考える。緯度誤差の場合と同様に経度誤差 $\Delta\phi$ により、INS 演算によって構成された L' 座標系は真の L 座標系とは異なる (図 4.3.6-3)。 $\Delta\phi$ は X_E 軸まわりの回転角であり、 L' 座標系は真の局地水平面に対して X_L 軸まわりに関して、 $\delta r_{L,x}$ だけ傾くことが分かる。しかし、 X_L 軸と X'_L は赤道上以外は平行な関係ではないので、 $\Delta\phi = \delta r_{L,x}$ の関係は成り立たない。したがって、経度誤差による $\delta r_{L,x}$ を考慮する際、 $\Delta\phi$ の物理量を適切に変換する必要がある。図 4.3.6-4 に示すように、 $\delta r_{L,x}$ は緯度 λ を用いて次のように表すことができる。

$$\delta r_{L,x} = \Delta\phi \cos \lambda \quad (4.3.6-7)$$

ただし、 $\Delta\phi$ による Z_L 軸まわりの誤差 $\delta r_{L,z}$ は、方位角誤差 $\delta\alpha$ に含まれるものとして 0 と仮定する。

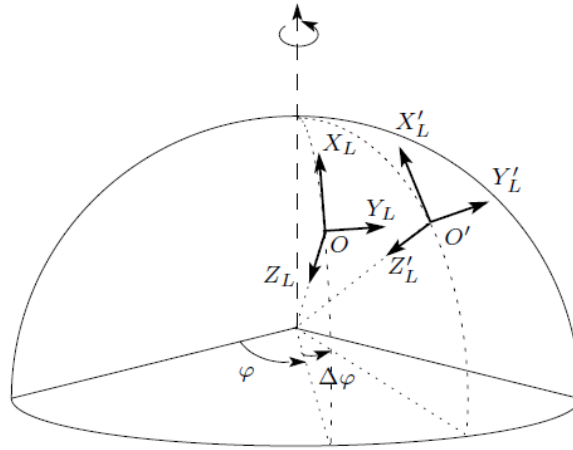


図 4.3.6-3 L' 座標系と真の L 座標系の関係

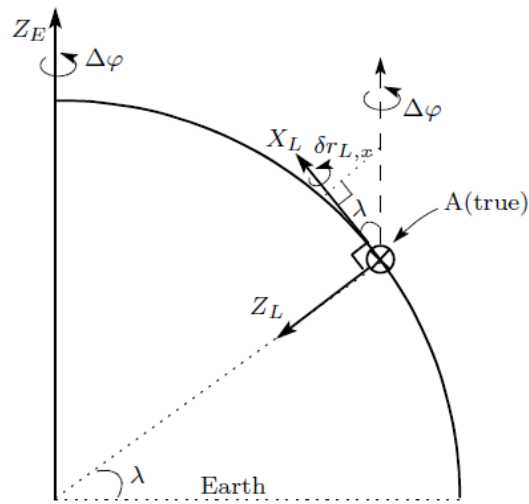


図 4.3.6-4 経度誤差と $\delta r_{L,x}$ の関係

以上より、 E 座標系での INS 演算の位置誤差 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\phi$ は L 座標系において

$$\begin{bmatrix} \delta r_{L,x}^i \\ \delta r_{L,y}^i \\ \delta r_{L,z}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\phi \cos \lambda \\ -\Delta\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.6-8)$$

と示され、更に C 座標系に変換すると

$$\begin{bmatrix} \delta r_{C,x}^i \\ \delta r_{C,y}^i \\ \delta r_{C,z}^i \end{bmatrix} = T_L^C \begin{bmatrix} \Delta\phi \cos \lambda \\ -\Delta\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.6-9)$$

と表すことができる。式(4.3.6-9)を $\delta\alpha$ による座標変換行列の誤差 δT_L^C を考慮し展開すると

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \delta r_{C,x}^i \\ \delta r_{C,y}^i \\ \delta r_{C,z}^i \end{bmatrix} &= (\bar{T}_L^C - \delta T_L^C) \begin{bmatrix} \Delta\varphi \cos \lambda \\ -\Delta\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \cos \lambda \\ -\Delta\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} (\beta)\cos \alpha - (\gamma)\sin \alpha & -(\beta)\sin \alpha - (\gamma)\cos \alpha & 0 \\ -(\beta)\sin \alpha - (\gamma)\cos \alpha & -(\beta)\cos \alpha + (\gamma)\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \cos \lambda \\ -\Delta\lambda \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.6-10}$$

となる。ただし、

$$\gamma \equiv \sin \delta\alpha, \quad \beta \equiv \cos \delta\alpha - 1 \tag{4.3.6-11}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi \cos \lambda \cos \alpha + \Delta\lambda \sin \alpha &= \delta r_{C,x}^i - [\Delta\varphi \cos \lambda \sin \alpha - \Delta\lambda \cos \alpha] \gamma \\
&\quad + [\Delta\varphi \cos \lambda \cos \alpha + \Delta\lambda \sin \alpha] \beta \\
&\quad - \Delta\varphi \cos \lambda \sin \alpha + \Delta\lambda \cos \alpha \\
&= \delta r_{C,y}^i - [\Delta\varphi \cos \lambda \cos \alpha + \Delta\lambda \sin \alpha] \gamma \\
&\quad - [\Delta\varphi \cos \lambda \sin \alpha - \Delta\lambda \cos \alpha] \beta
\end{aligned} \tag{4.3.6-12}$$

となる。これらをまとめ、さらに GPS 観測雑音 $n_{P,x}$ $n_{P,y}$ $n_{P,z}$ を考慮すると

$$\begin{aligned}
z_{P,x} &\equiv r_{C,x}^i - r_{C,x}^g \\
&= \delta r_{C,x}^i + (r_{C,y}^i - r_{C,y}^g) \gamma + (r_{C,x}^i - r_{C,x}^g) \beta + n_{P,x}
\end{aligned} \tag{4.3.6-13}$$

$$\begin{aligned}
z_{P,y} &\equiv r_{C,y}^i - r_{C,y}^g \\
&= \delta r_{C,y}^i - (r_{C,x}^i - r_{C,x}^g) \gamma + (r_{C,y}^i - r_{C,y}^g) \beta + n_{P,y}
\end{aligned} \tag{4.3.6-14}$$

として位置誤差に関する観測量を得る。また、高度誤差 δh に関しては

$$\begin{aligned}
z_{P,z} &\equiv h^i - h^g \\
&= \delta h + n_{P,z}
\end{aligned} \tag{4.3.6-15}$$

となる。

(ii) 速度誤差観測量

GPS 速度 (L 座標系) を C 座標系に座標変換し、INS 速度との差を速度観測量とする。したがって、方位角誤差 $\delta\alpha$ を考慮し方位角を $\alpha + \delta\alpha$ として L 座標系と C 座標系の関係を示す (図 4.3.6-5)。

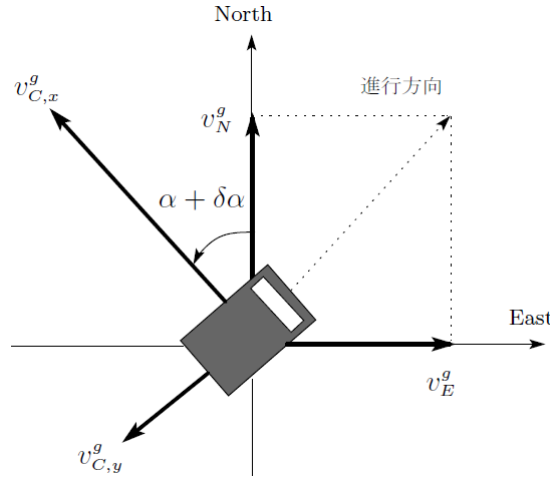


図 4.3.6-5 GPS 速度の C 座標系への変換

これより、GPS 速度を基準とすると INS 演算速度誤差は

$$\begin{aligned}
 \delta v_C^i &= v_C^i - T_L^C v_L^g \\
 &= v_C^i - (\bar{T}_L^C - \delta T_L^C) v_L^g \\
 &= v_C^i - \bar{T}_L^C v_L^g + \delta T_L^C v_L^g
 \end{aligned} \tag{4.3.6-16}$$

と表すことができる。ここで、位置誤差観測の場合と同様に γ 、 β を用いて展開すると

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \delta v_{C,x}^i \\ \delta v_{C,y}^i \\ \delta v_{C,z}^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_{C,x}^i \\ v_{C,y}^i \\ v_{C,z}^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_N^g \\ v_E^g \\ v_D^g \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} (\beta) \cos \alpha - (\gamma) \sin \alpha & -(\beta) \sin \alpha - (\gamma) \cos \alpha & 0 \\ -(\beta) \sin \alpha - (\gamma) \cos \alpha & -(\beta) \cos \alpha + (\gamma) \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_N^g \\ v_E^g \\ v_D^g \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.3.6-17}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
 \delta v_{C,x}^i &= v_{C,x}^i - v_N^g \cos \alpha + v_E^g \sin \alpha \\
 &+ (v_N^g \cos \alpha - v_E^g \sin \alpha) \beta - (v_N^g \sin \alpha + v_E^g \cos \alpha) \gamma
 \end{aligned} \tag{4.3.6-18}$$

$$\begin{aligned}
 \delta v_{C,y}^i &= v_{C,y}^i + v_N^g \sin \alpha + v_E^g \cos \alpha \\
 &- (v_N^g \sin \alpha + v_E^g \cos \alpha) \beta - (v_N^g \cos \alpha - v_E^g \sin \alpha) \gamma
 \end{aligned} \tag{4.3.6-19}$$

$$\delta v_{C,z}^i = v_{C,z}^i - v_D^g \tag{4.3.6-20}$$

となる。さらに GPS 観測雑音 $n_{v,x}$ $n_{v,y}$ $n_{v,z}$ を考慮すると

$$\begin{aligned}
 z_{v,x} &\equiv v_{C,x}^i - v_{C,x}^g \\
 &= \delta v_{C,x}^i - v_{C,x}^g \beta - v_{C,y}^g \gamma + n_{v,x}
 \end{aligned} \tag{4.3.6-21}$$

$$\begin{aligned} z_{v,y} &\equiv v_{C,y}^i - v_{C,y}^g \\ &= \delta v_{C,y}^i - v_{C,y}^g \beta + v_{C,x}^g \gamma + n_{v,y} \end{aligned} \quad (4.3.6-22)$$

$$\begin{aligned} z_{v,z} &\equiv v_{C,z}^i + v_{C,z}^g \\ &= \delta v_{C,z}^i + n_{v,z} \end{aligned} \quad (4.3.6-23)$$

と表すことができ、速度誤差の観測量を得る。

(iii) 観測方程式

式(4.3.6-13)～(4.3.6-15)、式(4.3.6-21)～(4.3.6-23)をまとめ、ベクトル・行列表現すれば、時刻 k での観測方程式は

$$z_L(k) = H_L(k)x_L(k) + n_L(k) \quad (4.3.6-24)$$

と表すことができる。ただし

$$\begin{aligned} z_L(k) &= [z_{p,x}(k) \ z_{p,y}(k) \ z_{p,z}(k) \ z_{v,x}(k) \ z_{v,y}(k) \ z_{v,z}(k)]^T \\ n_L(k) &= [n_{p,x}(k) \ n_{p,y}(k) \ n_{p,z}(k) \ n_{v,x}(k) \ n_{v,y}(k) \ n_{v,z}(k)]^T \end{aligned}$$

$$H_L(k) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \begin{bmatrix} r_{C,y}^i - r_{C,y}^g & r_{C,x}^i - r_{C,x}^g \\ -r_{C,x}^i + r_{C,x}^g & r_{C,y}^i - r_{C,y}^g \\ 0 & 0 \\ -v_{C,y}^g & -v_{C,x}^g \\ v_{C,x}^g & -v_{C,y}^g \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.6-25)$$

であり、平均0で共分散行列が $E[n_L(k)n_L^T(k)] \equiv R_L(k)$ のように与えられる正規性白色雑音とする。

4.3.7 Tightly coupled 方式

慣性航法複合演算において、慣性航法演算の誤差を補正する手法の Tightly coupled 方式について説明する。

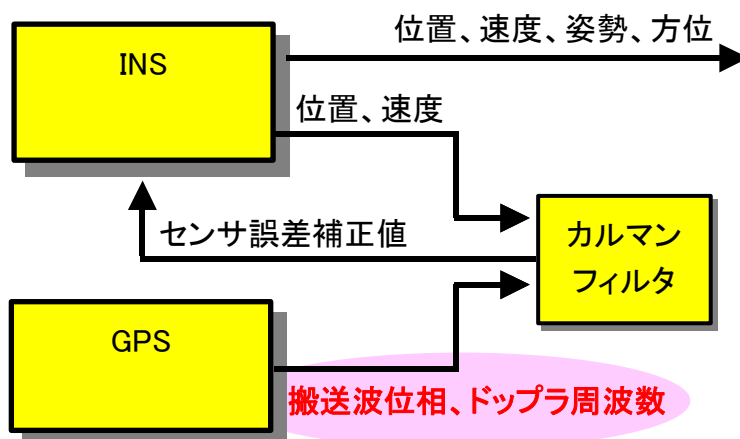
(1) 機能

Tightly coupled 方式のモデル式を算出する。

(2) アルゴリズム

GPS の測位結果（位置、速度）から観測量を構成する Loosely 方式に対し、Tightly 方式はコード擬似距離や搬送波位相積算値から直接観測量を構成し、INS 航法誤差を推定し補正する方式である。したがって、Loosely 方式では移動体に設置された受信機の 3 次元座標と受信機時計誤差を得るために、4 機以上の可視衛星が必要であったが、Tightly 方式ではコード擬似距離、搬送波位相積算値が得られれば観測量を構成することができるため、1 機以上の GPS 衛星が観測できれば INS 航法誤差を推定することが可能である。Tightly 方式のシステム構成図を図 4.3.7-1 に示す。

以下では、コード擬似距離、搬送波位相積算値の観測量について述べ、INS 演算誤差を状態変数とした慣性航法複合演算における観測方程式を導出する。また、以下では簡単のために、コード擬似距離については C/A コード、搬送波位相積算値については L1 波のみを用いる場合について説明するが、L2 波やその他の周波数帯についても同様に扱うことができ



る。

図 4.3.7-1 Tightly 方式のシステム構成

表 4.3.7-1 Tightly 方式における状態変数

(λ_1 はL1帯の波長、 m は受信衛星数)

1. $\delta r_{C,x}$: X_C 軸まわりの位置誤差	12. $d_{B,x}$: X_B 軸ジャイロバイアス
2. $\delta r_{C,y}$: Y_C 軸まわりの位置誤差	13. $d_{B,y}$: Y_B 軸ジャイロバイアス
3. $\delta v_{C,x}$: X_C 軸方向の速度誤差	14. $d_{B,z}$: Z_B 軸ジャイロバイアス
4. $\delta v_{C,y}$: Y_C 軸方向の速度誤差	15. γ : $\sin \delta\alpha$
5. $\delta\theta_{C,x}$: X_C 軸まわりの姿勢角誤差	16. β : $(\cos \delta\alpha - 1)$
6. $\delta\theta_{C,y}$: Y_C 軸まわりの姿勢角誤差	17. $\lambda_1 N_{L1,ku}^{12}$: 整数値バイアス (距離の単位)
7. δh : Z_C 軸方向の高度誤差	: : :
8. $\delta v_{C,z}$: Z_C 軸方向の速度誤差	: : :
9. $b_{B,x}$: X_B 軸加速度バイアス	: : :
10. $b_{B,y}$: Y_B 軸加速度バイアス	: : :
11. $b_{B,z}$: Z_B 軸加速度バイアス	: $\lambda_1 N_{L1,ku}^{1m}$: 整数値バイアス (距離の単位)

(i) 状態方程式

Tightly 方式における INS 航法誤差の状態変数を表 4.3.7-1 に示す。本方式では、Loosely 方式時の未知量 \mathbf{x}_L に加え、表 4.3.7-1 中の 16 番以降に示される整数値バイアス

$$\mathbf{N}_{L1} \equiv [\lambda_1 N_{L1,ku}^{12} \cdots \lambda_1 N_{L1,ku}^{1m}]^T \quad (4.3.7-1)$$

が状態変数に追加される。すなわち、Tightly 方式における状態変数ベクトルは

$$\mathbf{x}_T \equiv [\mathbf{x}_L^T \ \mathbf{N}_{L1}^T]^T \quad (4.3.7-2)$$

である。いま、 \mathbf{N} に関して、

$$\mathbf{N}_{L1}(k+1) = \mathbf{F}_{N_{L1}} \mathbf{N}_{L1}(k) + \mathbf{q}_{N_{L1}}(k) \quad (4.3.7-3)$$

とモデル化する。ただし $\mathbf{F}_{N_{L1}}$ は既知の $(m-1) \times (m-1)$ 行列、 $\mathbf{q}_{N_{L1}}$ は $m-1$ 次元の正規性白色雑音である。このとき、Tightly 方式における状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_L(k+1) \\ \mathbf{N}_{L1}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_L(k), k) \\ \mathbf{F}_{N_{L1}} \mathbf{N}_{L1}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L(k) \\ \mathbf{q}_{N_{L1}}(k) \end{bmatrix} \quad (4.3.7-4)$$

となる。

(ii) コード擬似距離および搬送波位相積算値

既知受信機座標、未知受信機座標をそれぞれ $[x_k(k) y_k(k) z_k(k)]^T$ 、 $[x_u(k) y_u(k) z_u(k)]^T$ とし、両受信機で共通に m 個の衛星を捉え、基準衛星を 1 とすると、その組み合わせは以下のように表せる。

$$(i, j) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (1, m)\}$$

このとき、独立な二重差は $(m-1)$ 組得られ、コード、搬送波位相の観測方程式はそれぞれ以下のように表すことができる。

$$\Delta_{CA}(k) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}(k)) + \mathbf{n}_{CA}(k) \quad (4.3.7-5)$$

$$\Delta_{L1}(k) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}(k)) + N_{L1} + \mathbf{n}_{L1}(k) \quad (4.3.7-6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta_{CA}(k) &\equiv [R_{ku}^{12}(k) R_{ku}^{13}(k) \cdots R_{ku}^{1m}(k)]^T \\ \Delta_{L1}(k) &\equiv [\lambda_1 \phi_{ku}^{12}(k) \lambda_1 \phi_{ku}^{13}(k) \cdots \lambda_1 \phi_{ku}^{1m}(k)]^T \\ \boldsymbol{\eta}(k) &\equiv [x_u(k) y_u(k) z_u(k)]^T \\ \mathbf{n}_{CA}(k) &\equiv [n_{CA,ku}^{12}(k) \quad n_{CA,ku}^{13}(k) \quad \cdots \quad n_{CA,ku}^{1m}(k)]^T \\ \mathbf{n}_{L1}(k) &\equiv [n_{L1,ku}^{12}(k) \quad n_{L1,ku}^{13}(k) \quad \cdots \quad n_{L1,ku}^{1m}(k)]^T \end{aligned}$$

とし、 N を整数値バイアス、 λ_1 を搬送波周波数の波長とする。このとき、観測雑音ベクトル $\mathbf{n}_{CA}(k)$ は平均 $\mathbf{0}$ 、共分散行列 R_{CA} 、 $\mathbf{n}_{L1}(k)$ は平均 $\mathbf{0}$ 、共分散行列 R_{L1} の正規性白色雑音と仮定する。ここで、下添え字の CA は C/A コード、 $L1$ は L1 帯の搬送波を意味する。また、ベクトル関数 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}(k))$ の各要素 $h_{j-1}(\boldsymbol{\eta}(k))$ 、 $(j = 2, 3, \dots, m)$ は

$$\begin{aligned} h_{j-1}(\boldsymbol{\eta}(k)) &= \{\rho_u^1(k) - \rho_k^1(k)\} - \{\rho_u^j(k) - \rho_k^j(k)\} \\ &= \left\{ \sqrt{(x_u(k) - x^1(k))^2 + (y_u(k) - y^1(k))^2 + (z_u(k) - z^1(k))^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(x_k(k) - x^1(k))^2 + (y_k(k) - y^1(k))^2 + (z_k(k) - z^1(k))^2} \right\} \quad (4.3.7-7) \\ &\quad - \left\{ \sqrt{(x_u(k) - x^j(k))^2 + (y_u(k) - y^j(k))^2 + (z_u(k) - z^j(k))^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(x_k(k) - x^j(k))^2 + (y_k(k) - y^j(k))^2 + (z_k(k) - z^j(k))^2} \right\} \end{aligned}$$

となる。この場合、式(4.3.7-6)の搬送波位相積算値 Δ_{L1} は距離の単位で表現されていることに注意する。式(4.3.7-7)より、ベクトル関数 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}(k))$ は非線形であるので、線形近似を行う。そこで、 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}(k))$ を INS 演算値のまわりでテーラー展開し、1 次の項までの近似を行うことで INS 航法誤差における観測方程式を導出する。INS 位置(単位 [m])を $\mathbf{r}_i(k) \equiv [x_i(k) y_i(k) z_i(k)]^T$ とすると

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}(k)) \cong \mathbf{h}(\mathbf{r}_i(k)) + \tilde{H}(k)(\boldsymbol{\eta}(k) - \mathbf{r}_i(k)) \quad (4.3.7-8)$$

となる。ただし、下添え字の E は地手系直交座標系である E 座標系を意味する。また、

$$\begin{aligned} \tilde{H}(k) &\equiv \left[\frac{\partial h(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial \boldsymbol{\eta}(k)} \right]_{\boldsymbol{\eta}(k)=\mathbf{r}_i(k)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial x_i(k)} & \frac{\partial h_1(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial y_i(k)} & \frac{\partial h_1(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial z_i(k)} \\ \frac{\partial h_2(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial x_i(k)} & \frac{\partial h_2(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial y_i(k)} & \frac{\partial h_2(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial z_i(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_{m-1}(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial x_i(k)} & \frac{\partial h_{m-1}(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial y_i(k)} & \frac{\partial h_{m-1}(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial z_i(k)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.7-9)$$

$$\frac{\partial h_{j-1}(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial x_i(k)} = \frac{(x_i(k) - x^1(k))}{\rho_i^1(k)} - \frac{(x_i(k) - x^j(k))}{\rho_i^j(k)} \quad (4.3.7-10)$$

$$\frac{\partial h_{j-1}(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial y_i(k)} = \frac{(y_i(k) - y^1(k))}{\rho_i^1(k)} - \frac{(y_i(k) - y^j(k))}{\rho_i^j(k)} \quad (4.3.7-11)$$

$$\frac{\partial h_{j-1}(\boldsymbol{\eta}(k))}{\partial z_i(k)} = \frac{(z_i(k) - z^1(k))}{\rho_i^1(k)} - \frac{(z_i(k) - z^j(k))}{\rho_i^j(k)} \quad (4.3.7-12)$$

とする。式(4.3.7-5)、(4.3.7-6)、(4.3.7-8)より、線形化されたコード擬似距離、搬送波位相積算値の観測方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{CA}(k) &\equiv \boldsymbol{\Delta}_{CA}(k) - \mathbf{h}(\mathbf{r}_i(k)) \\ &= \tilde{H}(k)(\boldsymbol{\eta}(k) - \mathbf{r}_i(k)) + \mathbf{n}_{CA}(k) \\ &= \tilde{H}(k)(-\delta \mathbf{r}_i(k)) + \mathbf{n}_{CA}(k) \end{aligned} \quad (4.3.7-13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{L1}(k) &\equiv \boldsymbol{\Delta}_{L1}(k) - \mathbf{h}(\mathbf{r}_i(k)) \\ &= \tilde{H}(k)(\boldsymbol{\eta}(k) - \mathbf{r}_i(k)) + \mathbf{N}_{L1} + \mathbf{n}_{L1}(k) \\ &= \tilde{H}(k)(-\delta \mathbf{r}_i(k)) + \mathbf{N}_{L1} + \mathbf{n}_{L1}(k) \end{aligned} \quad (4.3.7-14)$$

を得る。ただし、 $\delta \mathbf{r}_i(k)$ は E 座標系における位置誤差[m]を表す。ここで、式(4.3.7-13)、(4.3.7-14)の観測方程式を慣性航法複合演算に適用するため、 $\delta \mathbf{r}_i(k)$ を航法演算座標系である C 座標系の位置誤差[rad]に変換することが必要である。

まず、 $\delta \mathbf{r}_i$ を L 座標系における位置誤差[rad]に変換することを考える。ただし、省略のため時刻の表記 k を省略して表記する。ここで、座標変換行列 T_L^E を用いて L 座標系における位置誤差[m]に変換すると

$$\delta \mathbf{r}_i = T_L^E \delta \mathbf{r}_{L,i} = T_L^E \begin{bmatrix} \delta x_{L,i} \\ \delta y_{L,i} \\ \delta z_{L,i} \end{bmatrix} \quad (4.3.7-15)$$

となる。ただし、座標変換行列 T_L^E は、緯度 λ 、経度 φ を用いて

$$\begin{aligned}
T_L^E &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & 0 & -\cos \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \lambda \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.7-16}$$

とする。次に、弧度法を用いて式(4.3.7-15)を変換すると以下ようになる。

$$\delta \mathbf{r}_i = T_L^E \begin{bmatrix} (R_p + h)\Delta\lambda \\ (R_p + h)\Delta\varphi \\ \delta z_{L,i} \end{bmatrix} \tag{4.3.7-17}$$

ただし、 R_p は曲率半径であり、 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\varphi$ はそれぞれ緯度誤差、経度誤差を表す。

ここで、緯度誤差、経度誤差と L 座標系の関係について考える。まず、緯度誤差 $\Delta\lambda$ と $\delta r_{L,y}$ の関係を図 4.3.7-2 に示す。 $\Delta\lambda$ により、移動体の真の位置 O で E 座標系から L 座標系へ座標変換を行うと O' を原点とする L' 座標系 (X'_L , Y'_L , Z'_L) が構成される。しかし、この L' 座標系は実際の位置 O で構成されるべき L 座標系とは異なる。すなわち、緯度誤差が $+\Delta\lambda$ である場合、INS 演算によって構成される局地水平面 (L' 座標系) は、真の局地水平面に対して Y_L 軸まわりに関して、 $-\delta r_{L,y}$ だけ傾いてしまうことが分かる。したがって、次式の関係を得る。

$$\Delta\lambda = -\delta r_{L,y} \tag{4.3.7-18}$$

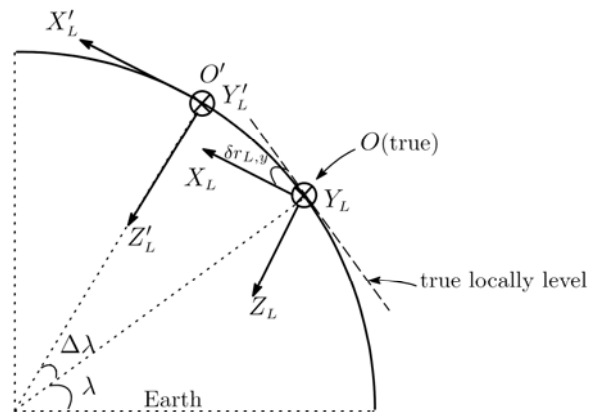


図 4.3.7-2 緯度誤差と $\delta r_{L,y}$ の関係

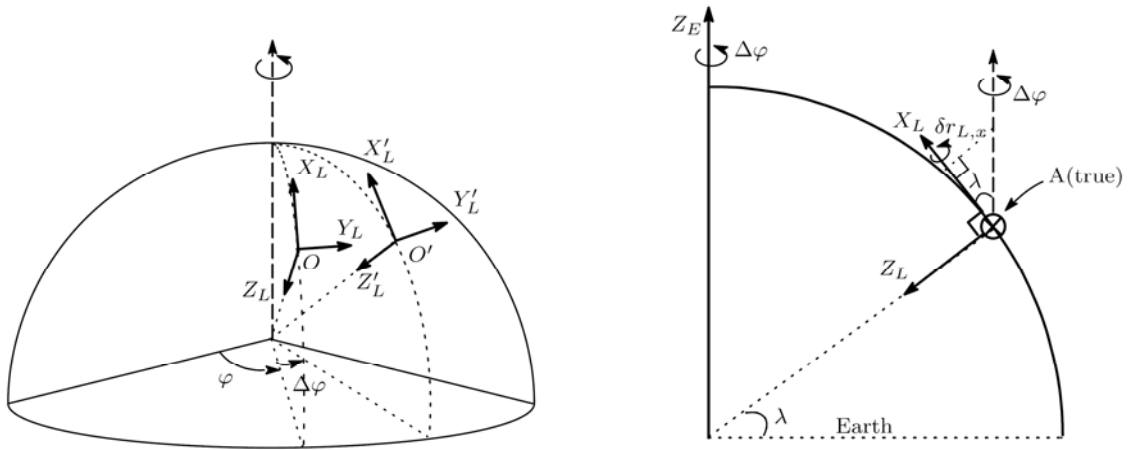


図 4.3.7-3 L' 座標系と真の L 座標系の関係 (左)、経度誤差と $\delta r_{L,x}$ の関係 (右)

次に、経度誤差 $\Delta\varphi$ がINS演算によって構成される局地水平面に及ぼす影響について考える。緯度誤差の場合と同様に経度誤差 $\Delta\varphi$ により、INS演算によって構成された L' 座標系は真の L 座標系とは異なる(図4.3.7-3(左))。 $\Delta\varphi$ は X_E 軸まわりの回転角であり、 L' 座標系は真の局地水平面に対して X_L 軸まわりに関して、 $\delta r_{L,x}$ だけ傾くことが分かる。しかし、 X_L 軸と X'_L は赤道上以外は平行な関係ではないので、 $\Delta\varphi = \delta r_{L,x}$ の関係は成り立たない。したがって、経度誤差による $\delta r_{L,x}$ を考慮する際、 $\Delta\varphi$ の物理量を適切に変換する必要がある。図4.3.7-3(右)に示すように、 $\delta r_{L,x}$ は緯度 λ を用いて次のように表すことができる。

$$\delta r_{L,x} = \Delta\varphi \cos \lambda \quad (4.3.7-19)$$

したがって以下のような関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta\varphi \\ \delta z_{L,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta r_{L,y} \\ \delta r_{L,x} \\ \cos \lambda \\ \delta r_{L,z} \end{bmatrix} \quad (4.3.7-20)$$

したがって、式(4.3.7-17)は

$$\delta r_i = T_L^E \begin{bmatrix} -(R_p + h)\delta r_{L,y} \\ (R_p + h)\delta r_{L,x} \\ \cos \lambda \\ \delta r_{L,z} \end{bmatrix} \quad (4.3.7-21)$$

となり、 δr_i を L 座標系における位置誤差[rad]に変換することができた。更に C 座標系に変換すると δr_i は以下のように表すことができる。

$$\delta r_i = T_L^E T_A^L T_B^A T_C^B \begin{bmatrix} \delta r_{C,x} \\ \delta r_{C,y} \\ \delta r_{C,z} \end{bmatrix} \quad (4.3.7-22)$$

ただし、

$$T_A = \begin{bmatrix} -(R_p + h) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_p + h}{\cos \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.7-23)$$

$$T_C^L = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3.7-24)$$

である。したがって、式(4.3.7-13)、(4.3.7-14)は

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{c_A}(k) &= -\tilde{H}(k)T_L^E(k)T_A(k)T_B^L(k)\delta\mathbf{r}_c(k) + \mathbf{v}(k) \\ &= \hat{H}(k)\delta\mathbf{r}_c(k) + \mathbf{n}_{c_A}(k) \end{aligned} \quad (4.3.7-25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{L_1}(k) &= -\tilde{H}(k)T_L^E(k)T_A(k)T_B^L(k)\delta\mathbf{r}_c(k) + \mathbf{N}_{L_1} + \boldsymbol{\varepsilon}(k) \\ &= \hat{H}(k)\delta\mathbf{r}_c(k) + \mathbf{N}_{L_1} + \mathbf{n}_{L_1}(k) \end{aligned} \quad (4.3.7-26)$$

となる。ただし、 $\hat{H}(k)$ の各要素は、省略のため時刻の表記 k を省いて以下のように表す。

$$\hat{H}(k) = [\mathbf{a}(k) \quad \mathbf{b}(k) \quad \mathbf{c}(k)] \quad (4.3.7-27)$$

$$\begin{aligned} a_{j-1}(k) &= \frac{(R_p + h)}{\cos \lambda} \left(\frac{\partial h_{j-1}}{\partial x_i} \sin \varphi - \frac{\partial h_{j-1}}{\partial y_i} \cos \varphi \right) \cos \alpha \\ &+ (R_p + h) \left\{ \left(\frac{\partial h_{j-1}}{\partial x_i} \cos \varphi + \frac{\partial h_{j-1}}{\partial y_i} \sin \varphi \right) \sin \lambda - \frac{\partial h_{j-1}}{\partial z_i} \cos \lambda \right\} \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.3.7-28)$$

$$\begin{aligned} b_{j-1}(k) &= \frac{(R_p + h)}{\cos \lambda} \left(-\frac{\partial h_{j-1}}{\partial x_i} \sin \varphi + \frac{\partial h_{j-1}}{\partial y_i} \cos \varphi \right) \sin \alpha \\ &+ (R_p + h) \left\{ \left(\frac{\partial h_{j-1}}{\partial x_i} \cos \varphi + \frac{\partial h_{j-1}}{\partial y_i} \sin \varphi \right) \sin \lambda - \frac{\partial h_{j-1}}{\partial z_i} \cos \lambda \right\} \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.3.7-29)$$

$$c_{j-1}(k) = - \left(\frac{\partial h_{j-1}}{\partial x_i} \cos \varphi + \frac{\partial h_{j-1}}{\partial y_i} \sin \varphi \right) \cos \lambda - \frac{\partial h_{j-1}}{\partial z_i} \sin \lambda \quad (4.3.7-30)$$

(iii) 観測方程式

以上より、Tightly 方式の慣性航法複合演算における観測方程式は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{CA}(k) \\ \mathbf{y}_{L1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{T,INS} & \mathbf{0}_{(m-1) \times (m-1)} \\ H_{T,INS} & I_{(m-1) \times (m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L(k) \\ \mathbf{N}_{L1}(k) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{LW} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{CA}(k) \\ \mathbf{n}_{L1}(k) \end{bmatrix} \quad (4.3.7-31)$$

ただし、

$$H_{T,INS}(k) \equiv \begin{bmatrix} a_1(k) & b_1(k) & & c_1(k) & & \\ a_2(k) & b_2(k) & & c_2(k) & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m-1}(k) & b_{m-1}(k) & \mathbf{0}_{(m-1) \times 4} & c_{m-1}(k) & \mathbf{0}_{(m-1) \times 9} & \end{bmatrix} \quad (4.3.7-32)$$

である。

以上より、Tightly 方式の場合は式(4.3.7-4)、(4.3.7-31)に拡張カルマンフィルタ等を適用することで INS の誤差を推定し、複合航法を行うことが可能である。

(iv) ドップラ観測量

ここでは、Tightly 方式の複合航法システムにおいてドップラ情報を活用する場合のシステムモデルについて述べる。

衛星と受信機の間には相対的な動きがある場合、受信機で観測される電波の周波数はドップラ効果によって変化する。したがって、衛星から送信される搬送波の周波数を f_T 、衛星・受信機間の距離を r 、電波の伝搬速度を v_s とすると、受信機で受信される周波数 f_R は

$$f_R = f_T \left(\frac{v_s - \dot{r}}{v_s} \right) = f_T \left(1 - \frac{\dot{r}}{v_s} \right) \quad (4.3.7-33)$$

となる。ゆえに送信周波数と受信周波数の差は次のように表される。

$$f_T - f_R = \frac{f_T}{v_s} \dot{r} = \frac{\dot{r}}{\lambda} \quad (4.3.7-34)$$

一般に受信機では離散的に観測が行われるため、サンプリング区間での距離変化、すなわち平均のドップラシフト量が観測される。実際には、受信機、衛星時計誤差、電離層、対流圏の影響等々が加わる。したがって、ドップラ観測量の観測モデルは、式(4.3.7-35)に示すような擬似距離観測モデルを時間微分して求めるのが合理的である。

$$\rho_u^p(t) = r_u^p(t, t - \tau_u^p) + \delta I_u^p(t) + \delta T_u^p(t) + c \left[\delta t_u(t) - \delta t^p(t - \tau_u^p) \right] + e_u^p(t) \quad (4.3.7-35)$$

ただし $r_u^p \equiv \sqrt{(x_u - x^p)^2 + (y_u - y^p)^2 + (z_u - z^p)^2}$ 、 δI_u^p : 電離層屈折効果、 δT_u^p : 対流圏屈折効果、 δt_u : 受信機時計誤差、 δt^p : 衛星時計誤差、 e_u^p : 雑音、 τ_u^p : 衛星 p から受信機 u への電波伝搬時間である。上式を微分して D とおくと、ドップラ観測モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned} D_u^p &= \dot{r}_u^p + \delta \dot{I}_u^p + \delta \dot{T}_u^p + c[\delta i_u - \delta i^p] + \dot{e}_u^p \\ &= \dot{r}_u^p + c\delta t_u + \varepsilon_u^p \end{aligned} \quad (4.3.7-36)$$

ただし

$$\varepsilon_u^p \equiv \delta \dot{I}_u^p + \delta \dot{T}_u^p - c\delta i^p + \dot{e}_u^p \quad (4.3.7-37)$$

である。ここで、 \dot{r}_u^p について考える。

$$\dot{r}_u^p = \left(\frac{\partial r_u^p}{\partial x_u} \dot{x}_u + \frac{\partial r_u^p}{\partial x^p} \dot{x}^p \right) + \left(\frac{\partial r_u^p}{\partial y_u} \dot{y}_u + \frac{\partial r_u^p}{\partial y^p} \dot{y}^p \right) + \left(\frac{\partial r_u^p}{\partial z_u} \dot{z}_u + \frac{\partial r_u^p}{\partial z^p} \dot{z}^p \right) \quad (4.3.7-38)$$

であるが、

$$\frac{\partial r_u^p}{\partial x_u} = \frac{(x_u - x^p)}{r_u^p}, \quad \frac{\partial r_u^p}{\partial y_u} = \frac{(y_u - y^p)}{r_u^p}, \quad \frac{\partial r_u^p}{\partial z_u} = \frac{(z_u - z^p)}{r_u^p} \quad (4.3.7-39)$$

$$\frac{\partial r_u^p}{\partial x^p} = -\frac{(x_u - x^p)}{r_u^p}, \quad \frac{\partial r_u^p}{\partial y^p} = -\frac{(y_u - y^p)}{r_u^p}, \quad \frac{\partial r_u^p}{\partial z^p} = -\frac{(z_u - z^p)}{r_u^p} \quad (4.3.7-40)$$

すなわち

$$\frac{\partial r_u^p}{\partial u} = -\frac{\partial r_u^p}{\partial s^p} \quad (4.3.7-41)$$

ただし

$$u \equiv [x_u, y_u, z_u]^T, \quad s^p \equiv [x^p, y^p, z^p]^T \quad (5-74.2.2)$$

なる関係がある。したがって

$$\mathbf{g}_u^p \equiv \left[\frac{\partial r_u^p}{\partial u} \right]^T = -\left[\frac{\partial r_u^p}{\partial s^p} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_u^p}{\partial x_u} & \frac{\partial r_u^p}{\partial y_u} & \frac{\partial r_u^p}{\partial z_u} \end{bmatrix} \quad (4.3.7-43)$$

$$\mathbf{v}_u \equiv [\dot{x}_u, \dot{y}_u, \dot{z}_u]^T, \quad \mathbf{v}^{s^p} \equiv [\dot{x}^p, \dot{y}^p, \dot{z}^p]^T \quad (4.3.7-44)$$

と定義すると、式(4.3.7-36)-(4.3.7-44)よりドップラ観測式は

$$D_u^p = \mathbf{g}_u^p (\mathbf{v}_u - \mathbf{v}^{s^p}) + c\delta i_u + \varepsilon_u^p \quad (4.3.7-45)$$

となる。

(v) ドップラ情報活用時の状態方程式および観測方程式

衛星の速度 \mathbf{v}^{s^p} は航法メッセージより既知であるので、式(4.3.7-45)における未知数は、受信機時計誤差の変化率 $c\delta \dot{i}_u$ である。受信機時計の精度は、使用する受信機に依存するが、ここでは一般的に離散時間系において

$$c\delta t_u(k+1) = F_D c\delta t_u(k) + q_D(k) \quad (4.3.7-46)$$

とモデル化できるものと仮定する。ただし F_D は既知の係数、 u_D は正規性白色雑音とする。したがって、Tightly 方式でのドップラ情報活用時における状態ベクトル、および状態方程式は次のようになる。

$$\mathbf{x}_{TD} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L^T & \mathbf{N}_{L1}^T & c\delta t_u \end{bmatrix}^T \quad (4.3.7-47)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_L(k+1) \\ \mathbf{N}_{L1}(k+1) \\ c\delta t_u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_L(k), k) \\ F_{N_{L1}} \mathbf{N}_{L1}(k) \\ F_D c\delta t_u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L(k) \\ \mathbf{q}_{N_{L1}}(k) \\ q_D(k) \end{bmatrix} \quad (4.3.7-48)$$

一方、式(4.3.7-45)に示した速度は、基本的に WGS-84 座標系に基づいたものであるため、観測方程式を記述する際は式(4.3.7-22)で行ったような座標変換を行う必要がある。前述のように、C 座標系における INS 速度、および INS 速度誤差の間には

$$\mathbf{v}_C^i = \mathbf{v}_c + \delta \mathbf{v}_C^i \quad (4.3.7-49)$$

ただし

$$\mathbf{v}_C^i \equiv \begin{bmatrix} v_{C,x}^i \\ v_{C,y}^i \\ v_{C,z}^i \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{v}_C^i \equiv \begin{bmatrix} \delta v_{C,x}^i \\ \delta v_{C,y}^i \\ \delta v_{C,z}^i \end{bmatrix} \quad (4.3.7-50)$$

なる関係がある。また、座標変換行列 T_C^L 、 T_L^E を用いると

$$\mathbf{v}_u = T_L^E T_C^L \mathbf{v}_c \quad (4.3.7-51)$$

と表すことができ、式(4.3.7-45)、(4.3.7-50)および式(4.3.7-51)より

$$\begin{aligned} \tilde{D}_u^p &\equiv D_u^p + \mathbf{g}_u^p \mathbf{v}^{sp} - \mathbf{g}_u^p T_L^E T_C^L \mathbf{v}_C^i \\ &= -\mathbf{g}_u^p T_L^E T_C^L \delta \mathbf{v}_C^i + c\delta t_u + \boldsymbol{\varepsilon}_u^p \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_u^p T_L^E T_C^L & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}_C^i \\ c\delta t_u \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_u^p \end{aligned} \quad (4.3.7-52)$$

となる。したがって受信衛星数を m とし、

$$\mathbf{y}_D \equiv \begin{bmatrix} \tilde{D}_u^1 & \cdots & \tilde{D}_u^m \end{bmatrix}^T \quad (4.3.7-53)$$

とすると、Tightly 方式においてドップラ情報を利用する場合の観測方程式は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{C_A}(k) \\ \mathbf{y}_{L1}(k) \\ \mathbf{y}_D(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{T,INS} & \mathbf{0}_{(m-1) \times (m-1)} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ H_{T,INS} & I_{(m-1) \times (m-1)} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ H_{D,INS} & \mathbf{0}_{(m-1) \times (m-1)} & \mathbf{1}_{m \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L(k) \\ \mathbf{N}_{L1}(k) \\ c\delta t_u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{C_A}(k) \\ \mathbf{n}_{L1}(k) \\ \mathbf{n}_D(k) \end{bmatrix} \quad (4.3.7-54)$$

ただし

$$H_{D,INS}(k) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_d^{x,1} & h_d^{y,1} & 0 & 0 & 0 & h_d^{z,1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & \\ 0 & 0 & h_d^{x,m} & h_d^{y,m} & 0 & 0 & 0 & h_d^{z,m} & & \mathbf{0}_{m \times 8} \end{bmatrix} \quad (4.3.7-55)$$

$$\begin{bmatrix} h_d^{x,p} & h_d^{y,p} & h_d^{z,p} \end{bmatrix} \equiv -\mathbf{g}_u^p T_L^E T_C^L \quad (p=1,2,\dots,m) \quad (4.3.7-56)$$

$$\mathbf{n}_D \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_u^1 & \cdots & \varepsilon_u^m \end{bmatrix} \quad (4.3.7-57)$$

である。

4.3.8 フィルタ変数の引継ぎ（切換え方式）

慣性航法複合演算において、高精度な測位を行うために複合方式の効率的な切換えの方法を説明する。

(1) 機能

Loosely coupled 方式と Tightly coupled 方式のフィルタ変数の引継ぎを行う。

(2) アルゴリズム

運用時の GPS 利用状況によって、Loosely coupled 方式と Tightly coupled 方式を適宜切換えて使用することによって、より効果的な複合航法を行う。すなわち、アンビギュイティが決定している場合：RTK-GPS 方式により高精度な GPS 測位結果（位置・速度）が利用可能である。

アンビギュイティが決定していない場合：RTK-GPS 方式では十分な精度の測位結果が得られないが、GPS 観測量（擬似距離、搬送波位相、ドップラ等）は利用可能である。

GPS 衛星が利用できない場合：GPS が全く利用できない。

の3つの状況に応じて、表 4.3.8-1 に示すような複合航法方式を適用することとする。

表 4.3.8-1 GPS 利用状況と、複合航法方式

RTK-GPS 利用状況	RTK-GPS 測位の可否	複合航法方式
アンビギュイティ決定	○	Loosely coupled 方式
アンビギュイティ未決定	×	Tightly coupled 方式
使用不可	×	慣性航法演算

複合航法方式の切換え時においては、システムモデルの変更が必要となるため、拡張カルマンフィルタ等の初期値を設定する必要がある。以下にその詳細を示す。

(i) Loosely coupled 方式→Tightly 方式の切換え

Loosely coupled 方式から Tightly coupled 方式への切換え時には、整数値バイアス N_{L1} 、 N_{L2} および受信機時計誤差 $c\delta t_u$ の初期値が必要となる。例えば、時刻 j で切換えが行われるとすると、時刻 $j-1$ までの航法結果を有効に活用して初期値を設定するために、以下のように $\hat{N}_{L1}(j|j-1)$ 、 $\hat{N}_{L2}(j|j-1)$ を設定できる。

$$\hat{N}_{L1}(j|j-1) = \mathbf{y}_{L1}(j) - \tilde{H}(j)(-\hat{\delta}\mathbf{r}_i(j|j-1)) \quad (4.3.8-1)$$

$$\hat{N}_{L2}(j|j-1) = \mathbf{y}_{L2}(j) - \tilde{H}(j)(-\hat{\delta}\mathbf{r}_i(j|j-1)) \quad (4.3.8-2)$$

また、 $c\delta t_u$ に関しては事前情報がないため、以下のように設定する。

$$c\hat{\delta}t_u(j|j-1) = 0 \quad (4.3.8-3)$$

(ii) Tightly coupled 方式→Loosely coupled 方式の切換え

Tightly coupled 方式から Loosely coupled 方式への切換え時には、整数値バイアス N_{L1} 、 N_{L2} および受信機時計誤差 $c\delta t_u$ が状態変数から削除される。したがって新たに初期値等を求める必要はなく、時刻 j で切換えが行われるとすると、時刻 $j-1$ での予測推定値を初期値として使用することができる。

4.3.9 拡張カルマンフィルタ

慣性航法演算処理における拡張カルマンフィルタの演算容を説明する。

(1) 機能

拡張カルマンフィルタを用いて INS の航法誤差を推定する。

(2) アルゴリズム

拡張カルマンフィルタはシステムモデルに含まれる非線形関数を、テーラー展開による線形化によって近似し、カルマンフィルタのアルゴリズムを適用するものである。拡張カルマンフィルタアルゴリズムを以下に示す。

フィルタ方程式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, k) \quad (4.3.9-1)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k \left[y_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \quad (4.3.9-2)$$

カルマンゲイン

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T \left[H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \right]^{-1} \quad (4.3.9-3)$$

推定誤差共分散行列

$$P_{k+1|k} = \hat{F}_k P_{k|k} \hat{F}_k^T + Q_k \quad (4.3.9-4)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} \quad (4.3.9-5)$$

ただし、 $\hat{F}(k)$ は次式とする。

$$\hat{F}_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \quad (4.3.9-6)$$

初期値

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (4.3.9-7)$$

$$\begin{aligned} P_{0|0} &\equiv \Pi \\ &= \text{diag} \{ \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{16} \} \end{aligned} \quad (4.3.9-8)$$

以上のアルゴリズムより得られる状態推定値を INS の演算各ステップにおいて補正することで、慣性航法複合演算を実現する。