

5. 地下水解析モデル

5.1. 地下水解析モデルの選定

地下水モデルは、地表水と一体化して水収支を求める目的から、ソースコードが公開されており改良可能なモデルが対象となる。このため、表 5-1 の 2 モデルを候補とした。

表 5-1 各地下水モデルの特徴

	GWAP	MOD-FLOW
作成元	岡山大学	USGS
次元数	準 3 次元 (実質 2 次元)	3 次元
不圧地下水の対応	対応	対応
河川とのやり取り	未対応	パッケージにより対応
涵養量	期間ごとに設定可能	

地下水解析精度が求められると同時に、合意形成のための計算速度の短縮化についても気に掛けておく必要がある。また、実際的な地下水データ、鉛直方向の土壌データ等の整備状況を考えると、無闇に高度な 3 次元の解析を行うよりも、存在するデータを最大限に利用して精度向上を目指す必要がある。このため、地下水解析プログラムとしては GWAP を選択する。なお、GWAP の特徴としては、広域地下水解析モデル及び有限要素法がキーワードとして挙げられる。

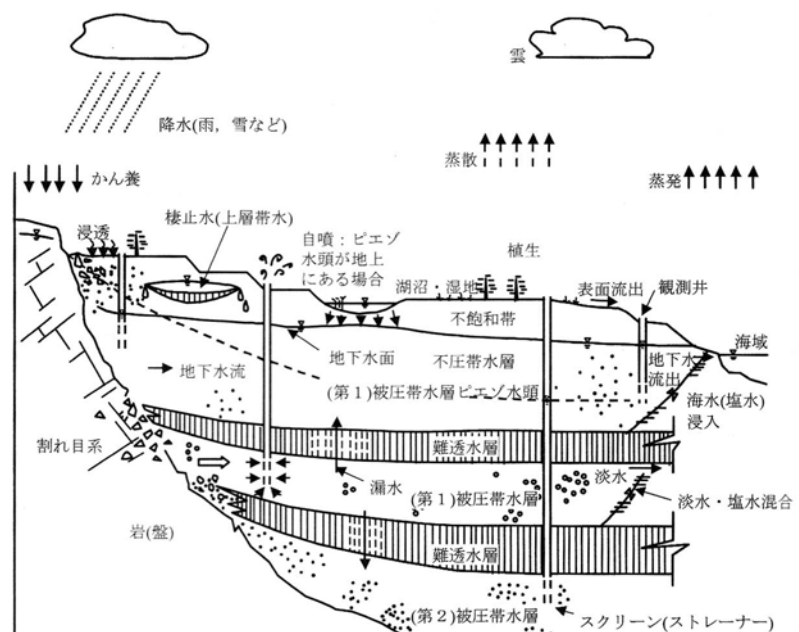
5.2. 広域地下水解析モデルの理論

本節で紹介する地下水流動モデル(GWAP:Ground Water Analysis Program)は、広域地下水の流れを表現する。これは、帯水層の厚さに較べて水平方向に十分な広がりを持っている帯水層あるいは帯水層の一部を対象としていることを意味する。

地下水の流れは大きく被圧地下水流と不圧地下水流に分類され、それぞれ被圧帯水層および不圧帯水層を流動する地下水流

のことである。被圧帯水層とは、その上位に水の移動を阻害する多孔体の单元である加圧層が存在するものをさし、不圧帯水層とはその上部の境界が地下水面であるものをさす。GWAP では、被圧帯水層および不圧帯水層における飽和地下水流動解析を可能としている。

図 5-1 地下水形態 (出典：地下水理学 丸善株式会社 P16)



なお、不圧帯水層には飽和流と不飽和流[次ページ参照]が介在するが、GWAP では飽和浸透流解析のみを再現し、不飽和過程の浸透は浸透率により表現している。

[飽和流と不飽和流]

下図は代表的な含水状態（ペンデュラー水、ファニキュラー水、おおび飽和）、つまり含水率の増減に伴う誘導力、つまり、表面張力（毛管力）、重力、および圧力の三者がどのように変化するかが定性的に描かれている。含水率が小さいとき、間隙水は土粒子の接触点に表面張力によって保持され、液島（liquid islands）を形成する。この場合は、表面張力が支配的となり、液島に作用する重力は間隙水の運動には弱い影響しか与えない。含水率が増し、液島が消え、土粒子間隙中に球状気泡が形成される含水状態になると、表面張力は気泡形状を保つ程度になり、重力と水圧によって間隙水は運動するようになる。表面張力は弱く、重力と圧力が間隙水の運動に関与するようになる。更に含水率が増し、飽和状態になると、表面張力は消え、重力と圧力のみが間隙水の運動に関与するようになる。

結論的には、含水率が小さいと表面張力が支配的となるが、飽和になると重力と圧力が支配的となる。このことは、地下水の流れのモデル化を行う際、基本的に重要となる。

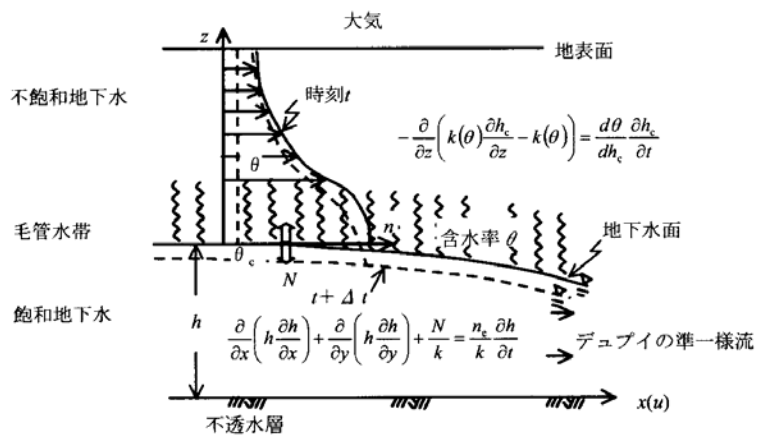
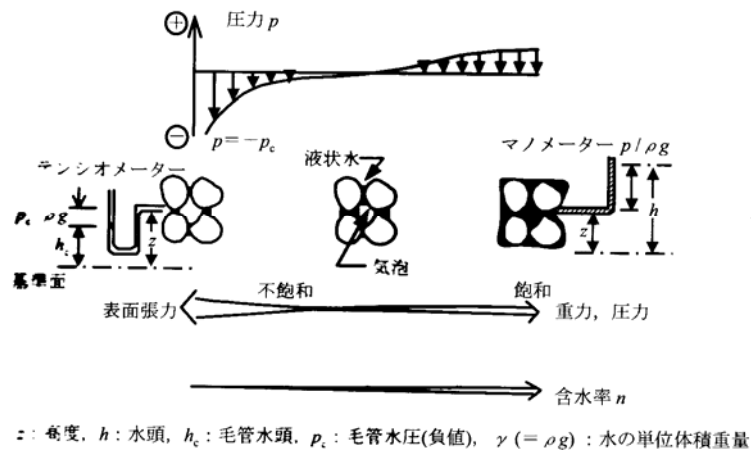


図 5-2 飽和流と不飽和流の関係（出典：地下水理学 丸善株式会社 P14,P83）

5.2.1. 帯水層内の流動特性

帯水層の通水能力は透水係数で表され、GWAPのような準3次元モデルでは、この透水係数を鉛直方向に積分するか、透水係数に帯水層の飽和帯の層厚をかけた値である、透水量係数として知られる平均通水特性値を用いて断面の通水能力を表現している。被圧帯水層の透水量係数は、その帯水層が均質で一様な厚さであるならば一定値となるが、不圧帯水層では飽和帯の層厚が地下水面の高さに依存するため透水量係数は常に空間的に異なった値となる。

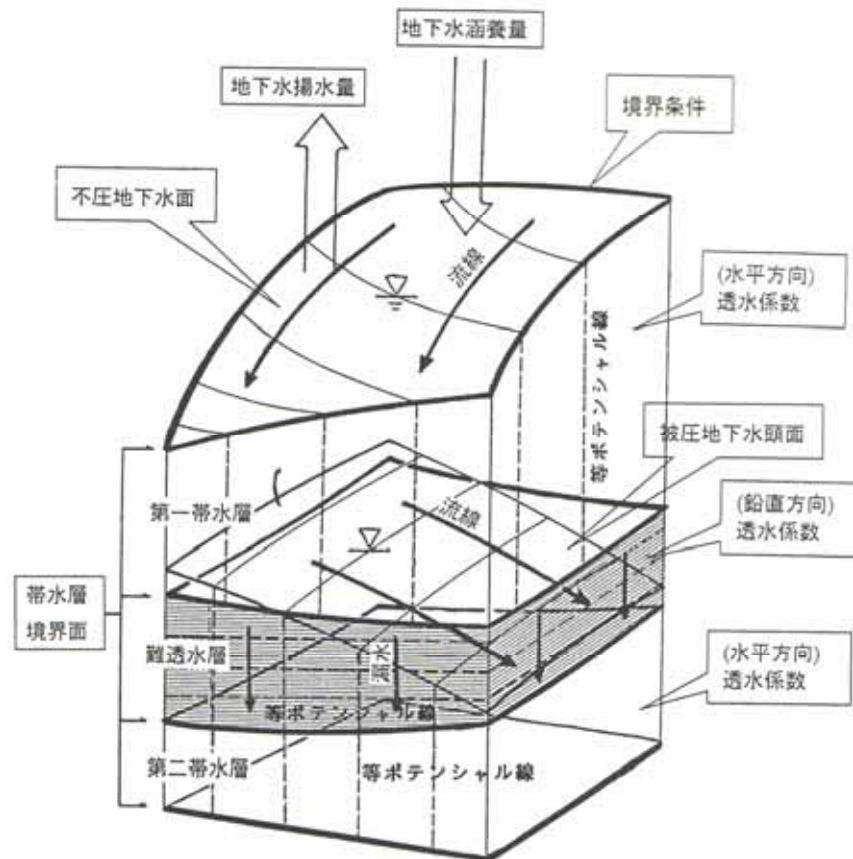


図 5-3 平面二次元・準三次元地下水浸透流解析で必要となる入力値（出典：地下水学会誌 第41巻第4号 P263～286）

ほとんどの解析では、一般化された流れの方程式は、流れ流域内にある帯水層のコントロールボリュームにおける質量保存則を適用することで定式化される。この体積に流入する正味の流量は調査対象の体積内で水が累積される率（ S_s :比貯留係数）に等しくなければならない、次式で誘導される（詳細後述）。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{数式 5-1})$$

²(数式 5-1)は深度方向に積分する前の式

ここで、

$i, j: 1, 2, 3$ (主透水座標方向)

K : 透水係数(L/T)

h : 水頭(L)

S_s : 比貯留係数(L^{-1})

Q : 単位体積当たりの部分的な注水あるいは吸い込み($1/T$)

x : 空間座標(L)

t : 時間(T)

(数式 5-1)中の比貯留係数 S_s は、単位水頭変化に対して帯水層内の単位体積当たりに貯留から解放あるいは貯留される水量を表している。 S_s は不圧条件下では 10^{-1} のオーダーである比産出率を用い、被圧条件下では 10^{-4} のオーダーの比貯留係数を用いる。また、比算出率は有効間隙率に等しいとされる。

表 5-2 比貯留係数

材料	比貯留率(1/m)
塑性粘土	$2.6-20 \times 10^{-3}$
硬質粘土	$1.3-2.6 \times 20^{-3}$
中程度の硬質粘土	$9.2-13 \times 10^{-4}$
蜜詰め砂礫	$4.9-10 \times 10^{-5}$
接合亀裂性岩	$3.3-69 \times 10^{-6}$
緩詰め砂	$4.9-10 \times 10^{-3}$
蜜詰め網	$1.3-2.0 \times 10 \times 10^{-3}$

表 5-3 比産出率

材料	比産出率〔無次元〕
粘土	0.01-0.18
細礫	0.13-0.40
中礫	0.17-0.44
粗礫	0.18-0.43
石灰岩	0.00-0.36
レス	0.14-0.22
細砂	0.01-0.46
中砂	0.16-0.46
粗砂	0.18-0.43
イオリス砂	0.32-0.47
細粒砂岩	0.02-0.40
中粒砂岩	0.12-0.41
片岩	0.22-0.33

風化片岩	0.06-0.21
シルト	0.01-0.39
シルト岩	0.01-0.33
凝灰岩	0.02-0.47

5.2.2. 支配方程式

ここでは、地下水の流れの基礎方程式について記述する。

1) 質量保存則

最初に、control volume と称される図 5-4 に示すような微小立方体を考える。この立方体はこれから我々が議論する地下水および地下水流動媒体のあらゆる特性を有するものとする。

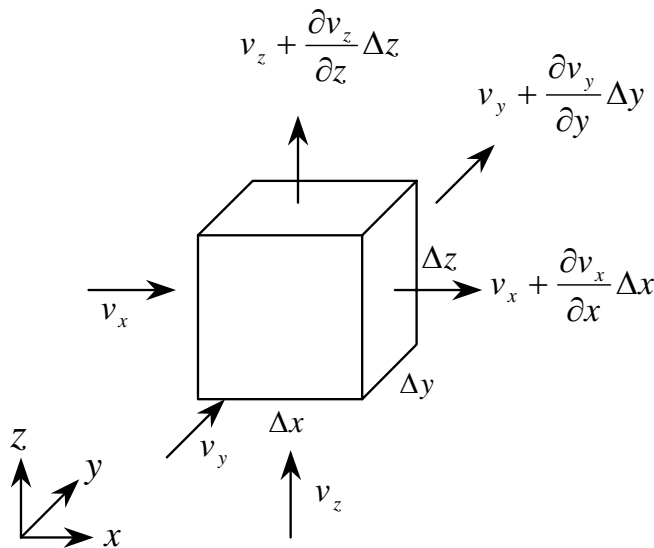


図 5-4 Control Volume

この立方体内を流れが通過し、その成分を xyz 直交座標の三成分に分割して整理すると、立方体の各軸直交面を通過する流れは図 5-4 に示す標記で表す事ができる。ここで、上流側から流入した 1 成分方向の流れ(例えば v_x)は control volume を通過する間に成分方向の増分項 $[(\partial v_x / \partial x) \Delta x]$ だけ変化する事を示している。これにはいくつかの説明があるが、ここでは Istok(1989)の解説を紹介する。

流入(あるいは上流)側で (v_x) の質量流入を有する流れが、微小区間 Δx 間に速度変化を受けた場合、流出(あるいは下流)側では Taylor 展開を適用すると次式で表す事ができる。

$$\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) \Delta x + \frac{\partial^2}{2! \partial x^2}(\rho v_x) (\Delta x)^2 + \frac{\partial^3}{3! \partial x^3}(\rho v_x) (\Delta x)^3 + \dots \quad (\text{数式 5-2})$$

ここで、 ρ は流体密度

上式の形で用いられる事の多い「微小区間 Δx では高次のべき乗項は無視できる」という仮定を導入すると、流出側の質量流速成分は次式となる。

$$\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) \Delta x \quad (\text{数式 5-3})$$

さらに、体積内で単位体積当たりの sink / source(排水/注入)項 $q(>0$ で排水)を導入、単位時間当たりの流出入流量を三方向成分について総計すると、この体積内での質量保存則から以下の連続の式が誘導できる。

$$\begin{aligned} & \rho v_x \Delta y \Delta z + \rho v_y \Delta z \Delta x + \rho v_z \Delta x \Delta y \\ & - \left(\left(\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z + \left(\rho v_y + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z \Delta x + \left(\rho v_z + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \right) \quad (\text{数式 5-4}) \\ & - \rho q \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial}{\partial t} (\rho S_w n) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

ここで、 S_w は飽和度、 n は有効間隙率、

q は体積内の単位体積当たりのシンク/ソース流量 [L^3/TL^3] (排水時、 $q>0$)

上式は、「左辺第1項の流入量から第2項の流出量と第3項の排水流量を差し引くと、右辺貯留項が残留する」ことを示している。右辺貯留項は、ある体積内の空隙（間隙率で表現）にどれくらいの水が貯まっている（飽和度）程度を示している。

（数式5-4）を整理し、両辺を立方体体積（ $x \ y \ z$ ）で除し、単位体積当たりの収支をみると以下となる。

$$-\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} - \rho q = \frac{\partial}{\partial t} (\rho S_w n) \quad (\text{数式 5-5})$$

定常流解析（時間変化を考慮しない）のときは、時間変化が無視できることから（数式5-5）の右辺項を $\frac{\partial}{\partial t} (\rho S_w n) = 0$ とした、以下の式が用いられる。

$$-\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} - \rho q = 0 \quad (\text{数式 5-5'})$$

2) 運動方程式と透水係数テンソル

ここで、Darcy 則を運動の式として左辺流速項 v に適用して、水頭 h を導入する。

Darcy 則は以下のように流れ方向成分に着目したものが一般に知られている。

$$v_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (\text{数式 5-6})$$

一般化表現として透水係数テンソルを用いた各方向成分の流速を示す。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (\text{数式 5-7})$$

この透水係数テンソルは対称性 ($K_{xy}=K_{yx}$, $K_{yz}=K_{zy}$, $K_{xz}=K_{zx}$) である。

3) 支配方程式

これらの流速 v を (数式 5-5) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + \rho K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} + \rho K_{xz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho K_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} + \rho K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} + \rho K_{yz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K_{zx} \frac{\partial h}{\partial x} + \rho K_{zy} \frac{\partial h}{\partial y} + \rho K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \rho q = \frac{\partial}{\partial t} (\rho S_w n) \end{aligned} \quad (\text{数式 5-8})$$

アインシュタインの縮約 (以後, i, j のみ縮約記号) を用いれば, 以下のとおりである。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \rho q = \frac{\partial}{\partial t} (\rho S_w n) \quad (\text{数式 5-9})$$

$i, j = 1, 2, 3, (1: x, 2: y, 3: z)$

(数式 5-9) を流体密度とダルシー則項に分けて微分を進めると以下のとおり。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \cdot K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \quad (\text{数式 5-10})$$

ここで, 流体密度 ρ は空間について非圧縮性であるとする上式右辺第一項は 0 となる。よって, (数式 5-10) は次式となる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \quad (\text{数式 5-11})$$

また, (数式 5-9) 右辺時間微分項 ($\partial/\partial t$) を全微分すると以下のとおりとなる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho S_w n) = \rho S_w \frac{\partial}{\partial t} (n) + S_w n \frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \rho n \frac{\partial}{\partial t} (S_w) \quad (\text{数式 5-12})$$

ここで, 上式の各項に以下の貯留性の解釈を適用する。

$\frac{\partial}{\partial t} (n)$ について

以下の議論は、飽和媒体内の水頭変化による空隙変化とこれに伴う排水/貯留を検討するものとし、不飽和状態ではこの関連による変化は考慮しない。

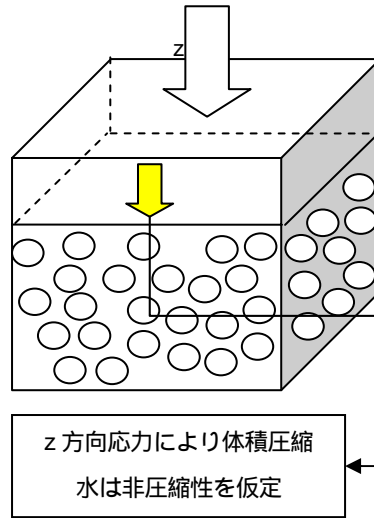
微小帯水層の固体部分のポリューム $(1-n) \times y \times z =$ 一定と考え、 n で微分を行った上で時間微分表示を行うと以下のとおり。

$$\Delta z \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) = (1-n) \frac{\partial(\Delta z)}{\partial t} \quad (\text{数式 5-13})$$

また、微小帯水層（骨格）の圧縮率 を用い $\alpha(1-n) = -\frac{\partial n}{\partial \sigma_z}$ (σ_z : 鉛直有効応力) より以下

のとおりとなる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha(1-n) \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \quad (\text{数式 5-14})$$



土粒子(固体部分)以外の部分を空隙=水分と仮定.この空間を空隙率で表現すると以下のとおり.
固体部分比率=1-n 水部分比率=n

土粒子(固体部分)の圧縮率を α とし、圧縮した分空隙率が減った(水分流出)とすると以下の式が成り立つ.

$$\alpha(1-n) = -\frac{\partial n}{\partial \sigma_z}$$

さらに、全応力(一定) = 有効応力 + 空隙水圧より $\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t}$ となるため、最終的には以下の形にまとめることができる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha(1-n) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{数式 5-15})$$

ここで、媒体の圧縮は飽和状態($S_w=1$)でのみ生じるとしている。

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho)$ について

流体を非圧縮性($\rho = \text{constant}$)とみると微分項は0となるが、流体が圧縮すると考え、その圧縮率をとると以下のようになる。

$$\beta_\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p}$$

また、時間微分表示を行うと、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \beta_\rho \frac{\partial p}{\partial t}$$

$\frac{\partial}{\partial t}(S_w)$ について

飽和流のみを扱う場合にはこの項は0となる。

飽和流($\frac{\partial S_w}{\partial t} = 0$)を扱うと考え($S_w=1.0$ =一定), また, $\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t}$ を用いて, これらをまとめる

と以下の地下水の支配方程式が整理される。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - q = [\alpha(1-n) + \beta n] \frac{\partial p}{\partial t} = [\alpha(1-n) + \beta n] \rho g \frac{\partial h}{\partial t} = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{数式 5-16})$$

【メモ】

不圧条件下では実用上, 比貯留係数は比産出率に等しい。被圧条件下では, 水と土粒子マトリックスの圧縮性によって水は貯留あるいは解放される。 10^{-1} のオーダーである比産出率と比較すると, 被圧下の貯留係数は小さく 10^{-4} のオーダー範囲である。

また, 不圧条件下では比貯留係数を有効間隙率 n_e とし, h を不圧面までの高さとするので(数式 1-16)

を適用できる。(参考: 右辺 = $n_e \frac{\partial h}{\partial t}$)

5.2.3. 境界条件および初期条件

1) 境界条件

浸透解析で考慮される事の多い境界条件は以下のものである。

既知水頭境界 (第一種境界, Dirichlet 条件)

既知水頭境界は, 河川, 湖沼, 運河, 海岸, 水たまりといった表面水が帯水層と自由に接触するときにみられる。

浸透解析では水頭値が変数として扱われるが, 既知水頭境界ではこれを変数とは扱わず, 指定された経過時間に対応した既知量を強制的に水頭値として指定する。

$$h(x, t) = H_b(x, t) \quad (\text{数式 5-17})$$

ここで, H_b は既知水頭の時間に対する関数であり, 最も簡単なものは時間に依存せず一定値を導入する。

既知流量境界 (ノイマン条件)

流量値を境界条件とするもので, 境界面を通過する流量で規定される。非流動境界条件の場合は流束に0を与える。

$$K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} n_i = -V(x_i, t) \quad (\text{数式 5-18})$$

V は境界面を通過する流速， n_i は境界面に垂直なベクトルの i 座標方向成分である。

半透水性境界（第3種，混合，コーシー，フーリエ，水頭依存境界）

半透水性境界は，帯水層と表面水の間で水が表面水と地下水間の水頭差に依存して移動する境界である（流量あるいは水頭が前もって規定できない）。この境界は表面水域からの漏水を表現するために一般に用いられる。

漏水原理を用いるモデルでは半透水性境界を導入すると便利である。流量はダルシー則を適用することで近似される。動水勾配は半透水性境界河床厚さ間の水頭差である。以下の式により現地検討で未知量となる透水係数 K と層厚 d を漏水抵抗 c と呼ばれる 1 つのパラメタで表現し，半透水性境界を表現する。

$$c(c: \text{漏水抵抗}(leakance)) = \frac{K}{d} (K: \text{透水係数}, d: \text{層厚})$$

ここで， c は次元 $[T^{-1}]$ で示される。

こうして，半透水性境界は以下の形になる。

$$K \frac{\partial h}{\partial x} - c(h - H) = 0 \quad (\text{数式 5-19})$$

h : 地下水水頭[L]

ここで， H : 表面水高さ[L]

K : 帯水層の透水係数[L/T]

半透水性境界では境界における地下水水頭と地下水流量には線形関係にある。よって，非常に大きな c の値を選ぶときには，半透水性境界は既知水頭境界として作用する。反対に，もし c がゼロに近づくと，表面水は地下水系から全く分離される。

2) 初期条件

非定常問題では，計算開始段階での水頭分布を設定する。

$$h(x, t = 0) = H_0(x) \quad (\text{数式 5-20})$$

一般には，初期条件は非定常問題でのみ必要である。しかし，非線形解析では前段階の水頭分布を基に物性および境界条件を設定する事から，定常問題であってもリーズナブルな分布条件を用いるべきである。

5.2.4. 準三次元への近似

三次元方程式を準三次元方程式に変換する。これは，水平方向の地下水流動が鉛直方向に比較して大きいと仮定できるためである。透水係数に 2 桁程度の違いがあれば，鉛直方向の流れを無視できると考える。これは，この程度の透水性のちがいがあれば，流線に屈折が起こって，透水性が高い地層

中の流れは境界とほぼ平行になり，透水性が低い地層中の流れはほぼ鉛直になるためである．

三次元浸透場での支配方程式を再掲する．

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{数式 5-21})$$

これに対する境界条件，初期条件はそれぞれ以下のとおり．

$$h(x, t) = H_b(x, t)$$

$$K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} n_i = -V(x_i, t)$$

$$h(x, t = 0) = H_0(x)$$

ここで，広域地下水解析を行うにあたり，以下の仮定を導入する．

《準三次元モデルへの仮定》

【仮定】

任意の平面位置 (x, y) において， $z(x_3)$ 方向の全水頭 h は一定である（静水圧分布）：

$$\frac{\partial h}{\partial x_3} = 0$$

【仮定】

仮定 を保ちながら，平行流れのみ扱う（Dupuit-Forchheimer の仮定）

【仮定】

鉛直方向流れ成分を無視できることから，地下水位下の浸透層厚さわたり $z(x_3)$ 方向に積分する事で質量保存を満たす．

地下水面（自由表面）をもつ不圧地下水流は，水面勾配があまり大きくない場合，デュプイの準一様流近似 (uniform flow approximation) を用い，鉛直流速を無視し，水平流速のみを考えればよい。

下図に示した x-z 軸面内の 2 次元地下水流を考える．不圧地下水は，水平流速 u と鉛直流速 w をもつ 2 次元流であり，断面内の流速分布は一様ではない．自由表面近傍の流速 q_s は，

$$q_s = -k \frac{dz}{ds} = -k \sin \beta \quad . \quad k : \text{透水係数}, \quad \beta : \text{自由表面と水平のなす角} . \quad \text{もし}, \quad \beta \text{ が小さければ},$$

$\sin \beta \approx \tan \beta = \frac{dh}{dx}$ とかけ， $q_s \approx u, w \approx 0$ となり，以下のように表現できる．

$$u = -k \frac{dh}{dx}$$

この式が意味することは，微小水平区間では自由表面は水平と近似でき，静水圧近似できるということ．つまり，下図の L 区間において自由表面は dx で分割された区間毎に水平に近似され，トータルでは階段状の水位が形成されるということとなる．

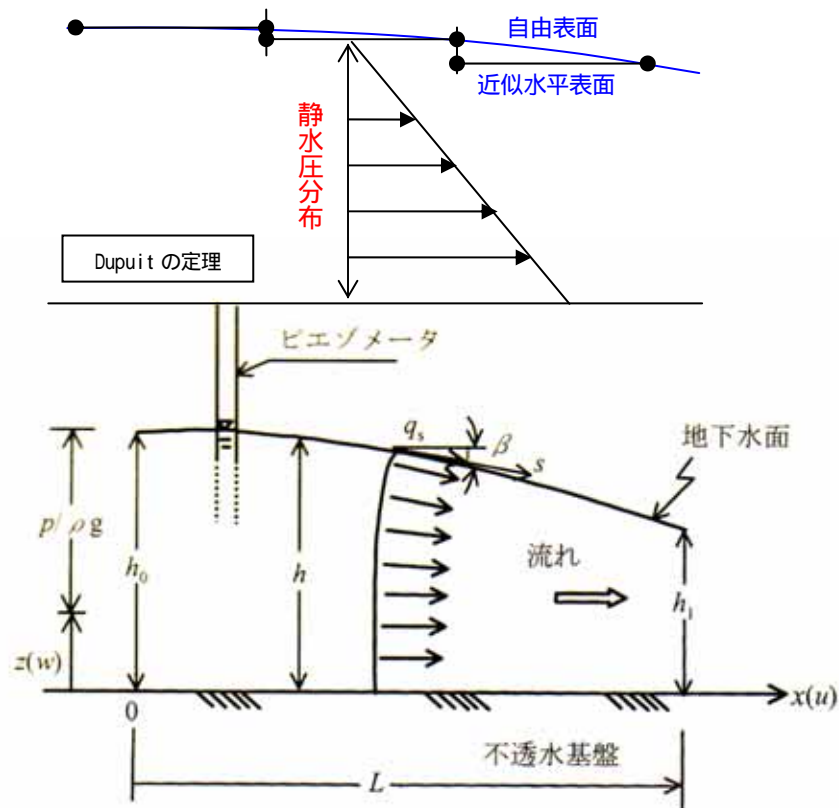


図 5-5 不圧地下水流におけるデュプイの準一様流

ゆえに、 z 方向の積分を行うことで、3次元方向の表現を以下の式により近似する。

$$\int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - q \right) dx_3 = \int_0^h S_s \frac{dh}{dt} dz \quad (\text{数式 5-22})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^h K_{ij} dx_3 \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \int_0^h q dx_3 = \int_0^h S_s dz \cdot \frac{dh}{dt} \quad (\text{数式 5-23})$$

$$T_{ij}(h) = \int_0^h K_{ij} dx_3 \quad (\text{数式 5-23a})$$

$$Q(h) = \int_0^h q dx_3 \quad (\text{数式 5-23b})$$

$$S = \int_0^h S_s dx_3 \quad (\text{数式 5-23c})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij}(h) \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \right) - Q(h) = S(h) \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (\text{数式 5-24})$$

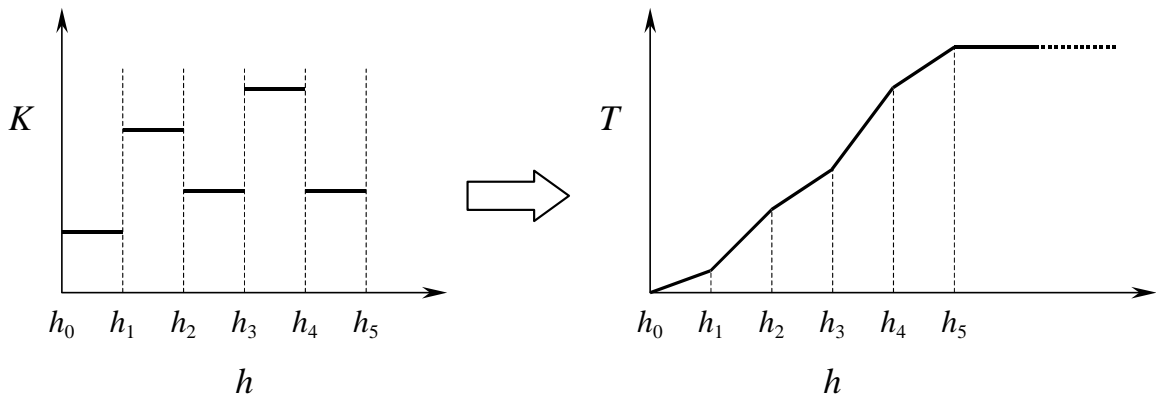
(数式 5-24)の縮約を解くと、以下のとおり。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) - Q = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{数式 5-25})$$

定式は T, S, Q が変数 h の関数となり、非線形問題を表す。各項について以下に解説する。

(1) 透水量係数 T

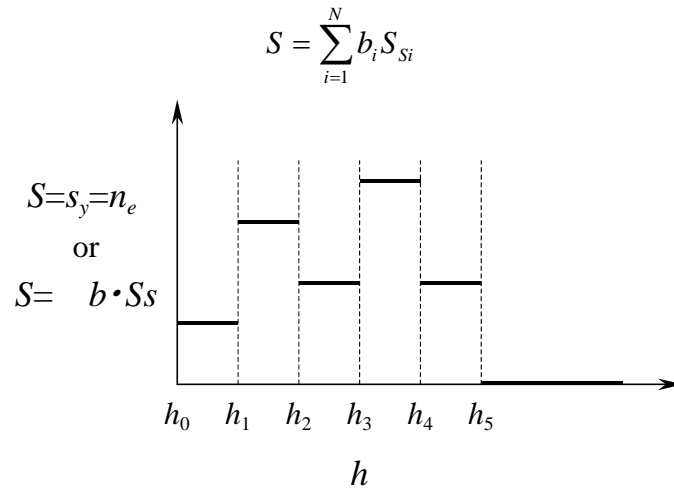
(数式 5-23a)をみると積分は以下の足し合わせに相当する。また、被圧状態では、 h はポテンシャル水頭を表し、実際の浸透断面高さは h ではなく層厚和になる。



(2) 貯留係数 S

貯留係数は「単位面積をもつ土柱において単位地下水頭の変化によって排出される水量」と定義でき、比貯留係数に深さを掛けたものであらわされる。貯留係数は、不圧状態と被圧状態で大きく異なる。

不圧帯水層では実際に地下水面が移動する区間の比産出率 S_y を S とおく。一般に S_y は有効間隙率に等しいと考えられる。被圧帯水層では層厚さにおける土の圧縮性に依存する。



不圧地下水で有効間隙率を下記の理由で近似的にもちいている。

不圧地下水での貯留係数は、正確には $S = n_e[\text{無次元}] + S_s[L^{-1}] \times D[m]$ となる。ところが、 $n_e \gg S_s \cdot D$ より $S \approx n_e$ とされている。

(3) 流量 Q

q が微小立方体内の流量を考えているのに対して Q は q を地下水面高さで積分する事で、単位面積を有する土柱内の流量を考える。

境界条件で既知流量境界の(数式 5-18)がそのまま適用されるが境界においても静水圧分布条件を確保しなければならない。

既知流量境界は以下の積分を考慮する。

$$\int_0^h K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} dx_3 \cdot n_i = - \int_0^h V(x_i, t) \quad (\text{数式 5-26})$$

$$T_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \cdot n_i = - \int_0^h V(x_i, t) \quad (\text{数式 5-27})$$

流速 V を浸透断面高さにわたって積分されたものであり、流束 Q に一致するディメンジョンをもつ。ゆえに

$$T_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \cdot n_i = -Q(x_i, t) \quad (\text{数式 5-28})$$

5.3. 広域地下水モデルの有限要素法による解法

前章にあるとおり、地下水解析における準三次元の支配方程式は以下のとおりである。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[T_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right] = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (\text{数式 5-29})$$

(ただし、 $i, j = 1, 2$)

(数式 5-29)を有限要素近似で表す。まず、全領域を所定の多角形で分割し、この多角形を要素、多角形を構成する頂点を節点と呼ぶ。各多角形は、節点と隣り合う節点で結ばれる境界面で結合しているものとし、浸透解析では各節点に水頭をもつことになる。

ここで、(数式 5-29) 式はあくまでも一つの微小要素内での釣り合いを考慮したものであるため、微小とは言えない大きさの要素にわたっての釣り合い関係を評価する必要がある。このためには、要素内での水頭分布を近似する必要がある。この水頭近似に用いられるのが内挿関数と呼ばれるものである。

5.3.1. 定常モデルによる有限要素解法

ある要素 E のなかの内挿関数は、以下のように表現できる。

$$h(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y \quad (\text{数式 5-30})$$

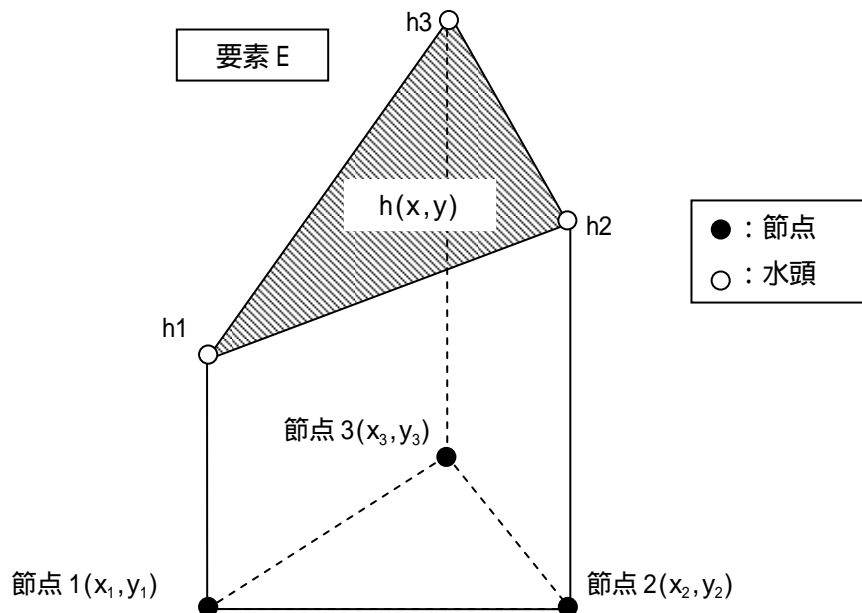


図 5-6 三角形要素における節点と水頭の考え方

ここで、それぞれの節点に対して内挿関数を適用すると以下のように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} h(x_1, y_1) &= h_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma y_1 \\ h(x_2, y_2) &= h_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma y_2 \\ h(x_3, y_3) &= h_3 = \alpha + \beta x_3 + \gamma y_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{数式 5-31})$$

これらを連立方程式として解くと、各係数 (α, β, γ) は以下ようになる。

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & x_1 & y_1 \\ h_2 & x_2 & y_2 \\ h_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{D} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & h_1 & y_1 \\ 1 & h_2 & y_2 \\ 1 & h_3 & y_3 \end{vmatrix}}{D}$$

(数式 5-32)

$$\gamma = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & h_1 \\ 1 & x_2 & h_2 \\ 1 & x_3 & h_3 \end{vmatrix} / D \quad D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2F_{\Delta}$$

ここで、 F_{Δ} は節点 1, 2, 3 を結んだ三角形の面積。上記小行列式に以下の記号を導入し、(数式 5-31) に代入すると、

$$\begin{aligned} A_1 &= x_2 y_3 - y_2 x_3 & B_1 &= y_2 - y_3 & C_1 &= x_3 - x_2 \\ A_2 &= x_3 y_1 - y_3 x_1 & B_2 &= y_3 - y_1 & C_2 &= x_1 - x_3 \\ A_3 &= x_1 y_2 - y_1 x_2 & B_3 &= y_1 - y_2 & C_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (\text{数式 5-33})$$

$$h(x, y) = (h_1(A_1 + B_1 x + C_1 y) + h_2(A_2 + B_2 x + C_2 y) + h_3(A_3 + B_3 x + C_3 y)) / D \quad (\text{数式 5-34})$$

となる。この式は、要素 E 中の任意の点の水頭を各節点 (節点 1, 節点 2, 節点 3) の水頭値を用いて表現している。

この算定した水頭にダルシー則を適用する。ただし、要素内の透水係数は k_f の一定値とする。

$$\begin{aligned} v_x &= -k_f \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -k_f (h_1 B_1 + h_2 B_2 + h_3 B_3) / D \\ v_y &= -k_f \cdot \frac{\partial h}{\partial y} = -k_f (h_1 C_1 + h_2 C_2 + h_3 C_3) / D \end{aligned} \quad (\text{数式 5-35})$$

透水係数と飽和帯の厚さは、節点よりも要素内の特性として表現される。このため、節点それぞれに透水係数または飽和帯の厚さを割り当てるならば、平均化操作が必要である。

ここで、三角形の各辺を横切る流量を Q_{S1} 、 Q_{S2} 、 Q_{S3} とする。これらについて要素内の連続性を考えるため、辺を横切る流量を要素の 3 節点に割り当てることを考える。節点流量を W_1 、 W_2 、 W_3 とし、どの節点にもそれを挟む 2 つの辺を横切る流量の半分を割り当て、要素内の連続性 ($Q_{S1} + Q_{S2} + Q_{S3} = 0$) を適用すると、以下の式が考えられる。

$$\begin{aligned} W_1 &= 0.5Q_{S3} + 0.5Q_{S2} = -0.5Q_{S1} \\ W_2 &= 0.5Q_{S1} + 0.5Q_{S3} = -0.5Q_{S2} \\ W_3 &= 0.5Q_{S2} + 0.5Q_{S1} = -0.5Q_{S3} \end{aligned} \quad (\text{数式 5-36})$$

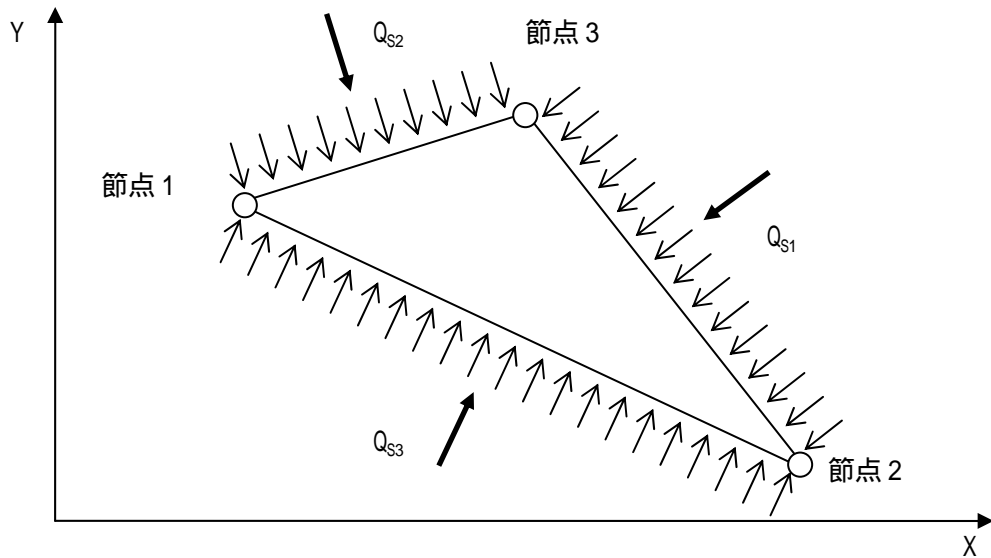


図 5-7 節点流量の定義

各辺を横切る Q_{S1} 、 Q_{S2} 、 Q_{S3} をダルシー流速 W_1 、 W_2 、 W_3 で表現すると以下のとおりとなる。ただし、飽和帯の厚さを m とする。

$$Q_{S1} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ -(x_2 - x_3) \end{pmatrix} \cdot m \quad Q_{S2} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_3 - y_1 \\ -(x_3 - x_1) \end{pmatrix} \cdot m \quad (\text{数式 5-37})$$

$$Q_{S3} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ -(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \cdot m$$

(数式 5-36) に (数式 5-35) , (数式 5-37) を代入し , $T=k_f \cdot m$ を用いると , 要素内の節点流量を得る。

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{T}{2D} [h_1(B_1B_1 + C_1C_1) + h_2(B_2B_1 + C_2C_1) + h_3(B_3B_1 + C_3C_1)] \\ W_2 &= \frac{T}{2D} [h_1(B_2B_1 + C_2C_1) + h_2(B_2B_2 + C_2C_2) + h_3(B_3B_2 + C_3C_2)] \\ W_3 &= \frac{T}{2D} [h_1(B_3B_1 + C_3C_1) + h_2(B_3B_2 + C_3C_2) + h_3(B_3B_3 + C_3C_3)] \end{aligned} \quad (\text{数式 5-38})$$

水頭以外の変数を $E_{ij} = (B_iB_j + C_iC_j) \cdot T / (2D)$ とすると , (数式 5-38) は以下のような簡単な式となる。

$$W_i = \sum_{j=1}^3 E_{ij} \cdot h_j \quad (\text{数式 5-39})$$

ここに , $i=1,2,3$, $j=1,2,3$ である。

これより，節点の局所標示を全体標示に変換する．節点の全体番号 k を要素番号 e と局所節点番号 i として与えると以下ようになる．

$$k = n(e, i) \quad (\text{数式 5-40})$$

ここに， $i=1,2,3$ ， $e=1,2, \dots, M$ である．

隣り合う要素のかどの点として表現される節点は，複数の組み合わせ (e, i) で表現されるが，それら全ては(数式 5-40)によりただ一つの全体節点番号として変換される．

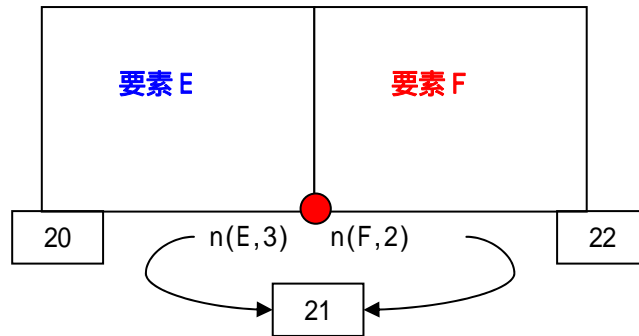


図 5-8 局所標示から全体標示への変換

要素 E についての節点座標，水頭値，流量は次のように変換される．

$$x_i^e \rightarrow x_k \quad y_i^e \rightarrow y_k \quad h_i^e \rightarrow h_k \quad W_i^e \rightarrow W_k^e \quad (\text{数式 5-41})$$

ここに， $k = n(e, i)$ である．また，流量については隣り合う要素の重複した節点のうち要素 E に係わる流量の意味で W_k^e の表現としている．

現在は要素 E の諸元のみを算出対象としているため，要素の任意水頭 $h(x, y)$ を算出する際，三つのベクトル A_i^e, B_i^e, C_i^e の 3 成分以外はすべてゼロの N 個のベクトルに変換される．そして，結果的には要素 E の各節点の流量を算出する際に用いる要素行列 E_{ij}^e は 9 成分以外はすべてゼロである N 行 N 列の行列に変換される．

$$A_i^e \rightarrow A_k^e \quad B_i^e \rightarrow B_k^e \quad C_i^e \rightarrow C_k^e \quad E_{ij}^e \rightarrow E_{kl}^e \quad (\text{数式 5-42})$$

ここに， $i=1,2,3$ ， $j=1,2,3$ ， $k = n(e, i)$ ， $l = n(e, i)$ であり，他の全ての成分 (k, l) については $A_k^e = B_k^e = C_k^e = E_{kl}^e = 0$ となる．要素方程式を全体番号で表現すると以下ようになる．

$$W_k^e = \sum_{l=1}^n E_{kl}^e \cdot h_l \quad (\text{数式 5-43})$$

なお，要素 E に含まれない全節点 k についての W_k^e は自動的にゼロである ($\because E_{ij}^e = 0$)．

全要素の方程式が各節点で連続性を満たすように全体方程式の中に集められる．これは節点 k への全要素の流れの寄与

W_k^e と節点 k への外部からの流入（流出）量の総和がゼロでなければならないことを意味する。

$$\sum_{e=1}^M W_k^e - Q_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{数式 5-44})$$

(数式 5-44)に(数式 5-43)を代入すると以下のとおり。

$$\sum_{e=1}^M \left[\sum_{l=1}^N E_{kl}^e h_l \right] - Q_k = 0 \quad (\text{数式 5-45})$$

または,

$$\sum_{l=1}^N \left[\sum_{e=1}^M E_{kl}^e \right] h_l - Q_k = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (\text{数式 5-46})$$

一般形で表すと,

$$\sum_{l=1}^N a_{kl} h_l - Q_k = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (\text{数式 5-47})$$

5.3.2. 非定常モデルによる有限要素解法

水頭分布を内挿関数で近似した(数式 5-31)を利用することで, 実際の水頭分布と幾ばくかの差違が生じる。つまり, 支配方程式 $L(h(x,y,t))=0$ に内挿近似 h^N を導入すると, 残差があることから以下のように式値は0とはならない。

$$L(h^N(x, y, t)) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} \right) - Q - S \frac{\partial h^N}{\partial t}$$

$$L(h^N(x, y, t)) \neq 0 \quad (\text{数式 5-48})$$

そこで, 残差方程式に重みを掛けたものを領域全体にわたって平均化(積分)することで, 全体領域 R での全体的な残差を0にする重み付き残差法(WRM)を用いる。

$$\int_R L(h^N(x, y, t)) W(x, y) dR = 0 \quad (\text{数式 5-49})$$

ここで, 重み関数 W の満たすべき条件について考えてみる。

残差が生じているのは節点間あるいは要素内の地点での式値であり, 各節点では残差は生じないことから, 当該節点水頭を求める場合は $W_n(x_n, y_n) = 1$ (Lotation的役割をイメージ), それ以外の節点では $W = 0$ をとるようなものとなる。

一般に, 重み付き残差法に用いられる重み関数 W にはいくつかのものが知られているが, ここでは重み関数 W に内挿関数 N を適用する Galerkin 法を用いる。

1) Galerkin 法による定式化

(数式 5-48)に重み関数 W を掛けて、領域全体にわたって積分する。

$$\int_R \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} \right) - Q - S \frac{\partial h^N}{\partial t} \right] W_n dR = 0 \quad (\text{数式 5-50})$$

W を各項に掛けそれぞれの整理を試みる。

$$\int_R \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} \right) W_n - Q W_n - S \frac{\partial h^N}{\partial t} W_n \right] dR = 0 \quad (\text{数式 5-51})$$

ここで、 h^N が要素内で線型分布している(三角形要素ではこれに相当する)場合には、 h^N の1次の空間微分項は定数 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial h^N}{\partial x_j} \right) = 0 \right)$ となり、さらに T_{ij} が要素内で一定値(均質)であるなら、(数式

5-51)の透水量係数を含んだ微分項は $0 \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = 0 \right)$ となり、(数式 5-51)を解くことができない。

そこで、以下の手順で(数式 5-51)を変形する。まず、各高次微分項は部分積分技法を用いて変形する。

$$\int_R \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} \right) W_n \right] dR = \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} W_n \right) \right] dR - \int_R \left[\frac{\partial W_n}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} \right) \right] dR \quad (\text{数式 5-52})$$

さらに、Gauss の積分定理から次式が誘導できる。

$$\begin{aligned} \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} W_n \right) \right] dR &= \int_L W_n T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} n_i dL \\ \therefore \int_R \operatorname{div} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} W_n \right) dR &= \int_L T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} W_n \cdot n_i dL \end{aligned} \quad (\text{数式 5-53})$$

ここで、 n_i は境界に垂直な法線の $x(x_1)$ および $y(x_2)$ 方向成分であり、境界からの水の流入出を表している。(数式 5-52 及び 5-53)をまとめると以下のとおりになる。

$$\int_L \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} W_n \cdot n_i \right) dL - \int_R \left(\frac{\partial W_n}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial x_j} \right) \right) dR - \int_R S \frac{\partial h^N}{\partial t} \cdot W_n dR - \int_R Q \cdot W_n dR = 0 \quad (\text{数式 5-54})$$

(数式 5-54)の左辺第 1 積分項は境界面を通過する流入(流出)を示しているの以下のように表現できる。ただし、境界面流入(流出)のうち、 x 方向、 y 方向の流入(流出)を Q_x^N 、 Q_y^N とする。

$$\int_L W_n \cdot T_{ij} \frac{\partial h^N}{\partial t} \cdot n_i dL = \int_L W_n [-Q_x^N - Q_y^N] dL = - \int_L W_n \left[\sum_{i=1}^2 Q_{xi}^N \right] dL \quad (\text{数式 5-55})$$

ここで、 h^N を内挿近似式で置換する。

$$\int_R \left(\frac{\partial W_n}{\partial x_i} \cdot T_{ij} \frac{\partial \sum_{m=1}^M N_m h_m}{\partial x_j} \right) dR + \int_L W_n \left(\sum_{i=1}^2 Q_{xi}^N \right) dL + \int_R Q W_n dR + \int_R S \frac{\partial \sum_{m=1}^M N_m h_m}{\partial t} W_n dR = 0 \quad (\text{数式 5-56})$$

さて、全体領域 R を有限要素に分割すると各要素領域 R^e でも上式が成立する、すなわち以下となる。

$$\int_R L(h^N(x, y, t)) W(x, y) dR = \sum_1^{\text{Num.Elements}} \int_{R^e} L(h^N(x, y, t)) W(x, y) dR^e \quad (\text{数式 5-57})$$

$$\int_{R^e} \left(\frac{\partial W_n^e}{\partial x_i} \cdot T_{ij} \frac{\partial \sum_{m=1}^M N_m^e h_m^e}{\partial x_j} \right) dR^e + \int_{L^e} W_n^e \left(\sum_{i=1}^2 Q_{xi}^N \right) dL^e + \int_{R^e} Q W_n^e dR^e + \int_{R^e} S \frac{\partial \sum_{m=1}^M N_m^e h_m^e}{\partial t} W_n^e dR^e = 0 \quad (\text{数式 5-58})$$

これより全体領域に対しては、要素毎の(数式 5-58)を全要素にわたって連立(総和)した方程式が得られる。

$$\sum_{e=1}^{\text{Num.Elements}} \left[\int_{R^e} \left(\frac{\partial W_n^e}{\partial x_i} \cdot T_{ij} \frac{\partial \sum_{m=1}^M N_m^e h_m^e}{\partial x_j} \right) dR^e + \int_{L^e} W_n^e \left(\sum_{i=1}^2 Q_{xi}^N \right) dL^e + \int_{R^e} Q W_n^e dR^e + \int_{R^e} S \frac{\partial \sum_{m=1}^M N_m^e h_m^e}{\partial t} W_n^e dR^e \right] = 0 \quad (\text{数式 5-59})$$

各節点水頭値 h_m は $\| (x, y) = 1$ 時の値であり、座標には依存しないので積分の外に出る。よってこれをマトリックス表示すると以下のようなものである。

$$\boxed{[A_{nm}] \{h_m\} + [F_{nm}] \left\{ \frac{dh_m}{dt} \right\} = \{Q_m\} - \{D_m\}} \quad (\text{数式 5-60})$$

ここで、

$$\begin{aligned}
[A_{nm}] &= \sum_{e=1}^{Num.Elements} [A_{nm}]^e \\
&= \sum_{e=1}^{Num.Elements} \int_{R^e} \left(\frac{\partial W_n^e}{\partial x_i} \left(T_{ij} \frac{\partial N_m^e}{\partial x_j} \right) \right) dR^e
\end{aligned}
\tag{数式 5-61}$$

$$\begin{aligned}
\{Q_m\} &= - \sum_{e=1}^{Num.Elements} \{Q_m\}^e \\
&= - \sum_{e=1}^{Num.Elements} \int_{L^e} W_n^e N_m^e \sum_{i=1}^2 Q_{xi} dL^e
\end{aligned}
\tag{数式 5-62}$$

(要素境界を横切る流入(流出)量)

$$\begin{aligned}
\{D_m\} &= \sum_{e=1}^{Num.Elements} \{D_m\}^e \\
&= \sum_{e=1}^{Num.Elements} \int_{R^e} Q W_m^e dR^e
\end{aligned}
\tag{数式 5-63}$$

(要素内に流入(流出)する量)

$$\begin{aligned}
[F_{nm}] &= \sum_{e=1}^{Num.Elements} [F_{nm}]^e \\
&= \sum_{e=1}^{Num.Elements} \int_{R^e} S N_m^e W_n^e dR^e
\end{aligned}
\tag{数式 5-64}$$

(数式 5-61~64)を見ると、積分は内挿関数 N と重み関数 W (Galerkin 法では両者は一致) の微積分となっている。

ここで、以下の簡略化を導入する。

- (1) 透水量係数 T は要素内で一定であると考え、透水量係数 T は節点上の全水頭 h に依存するため、 T は要素内では h と同様に内挿関数による近似を行なう。よって、 $T = T_l N_l^e$ (ここで、 l は要素節点番号) と表すが、これは節点値の平均値 \bar{T} である。
- (2) 境界面で定義される断面通過流束 Q については上式では節点で定義される流束値の内挿式を示しているが、三角形要素内では一様分布とする。
- (3) 貯留成分では、飽和状態の貯留係数 S は要素内では均一であるが、不圧状態では節点の全水頭値に依存する。よって、 $S = S_l N_l^e$ (ここで、 l は要素節点番号) と表すが、これは節点値の平均値 \bar{S} である。

また、 $[F]$ はマトリックスを表しているが、Neuman の提唱する差分法で用いられる技法の適用である Lumped Mass Method を適用して、ベクトル化する。

ここで、以下の三角形（定歪）要素における内挿関数の微分および積分を導入する。また、 $W=N$ とした。

$$\begin{aligned}
 \int_{R^e} N_j dR^e &= \frac{\Delta}{3} \\
 \int_{R^e} N_i N_j dR^e &= \frac{\Delta}{12} & \int_{R^e} N_i N_i dR^e &= \frac{\Delta}{6} \\
 \int_{R^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} dR^e &= \frac{b_i}{2} & \int_{R^e} \frac{\partial N_i}{\partial z} dR^e &= \frac{c_i}{2} \\
 \int_{R^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dR^e &= \frac{b_i b_j}{4\Delta} & \int_{R^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} dR^e &= \frac{b_i c_j}{4\Delta} & \int_{R^e} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} dR^e &= \frac{c_i c_j}{4\Delta}
 \end{aligned}
 \tag{数式 5-65}$$

(数式 5-65)を(数式 5-61~65)に代入する。

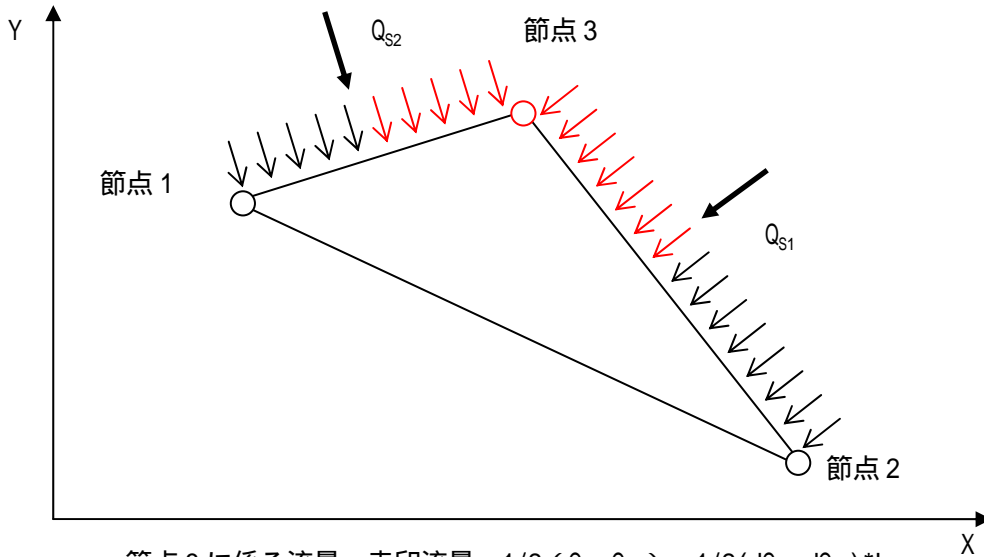
$$\begin{aligned}
 [A_{ij}]^e &= \int_{R^e} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial W_i^e}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial W_i^e}{\partial x} \left(T_{xy} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial W_i^e}{\partial y} \left(T_{yx} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial W_i^e}{\partial y} \left(T_{yy} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \end{array} \right] dR^e \\
 &= \frac{1}{4\Delta} \left\{ T_{xx} b_i b_j + T_{xy} b_i c_j + T_{yx} b_j c_i + T_{yy} c_i c_j \right\} \\
 [A_{ij}]^e &= \frac{1}{4\Delta} \left\{ \begin{array}{l} T_{xx} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + T_{yy} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} \\ + T_{xy} \begin{bmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & b_1 c_3 \\ b_2 c_1 & b_2 c_2 & b_2 c_3 \\ b_3 c_1 & b_3 c_2 & b_3 c_3 \end{bmatrix} + T_{yx} \begin{bmatrix} c_1 b_1 & c_1 b_2 & c_1 b_3 \\ c_2 b_1 & c_2 b_2 & c_2 b_3 \\ c_3 b_1 & c_3 b_2 & c_3 b_3 \end{bmatrix} \end{array} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{数式 5-67}$$

透水係数テンソルは対称であるから、 $T_{xy}=T_{yx}$ であり、これを代入すると、(数式 5-67)の $[A]^e$ マトリックスも対称になる。

$$[A_{ij}]^e = \frac{1}{4\Delta} \left\{ \begin{array}{l} T_{xx} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + T_{yy} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} \\ + T_{xy} \begin{bmatrix} b_1 c_1 + c_1 b_1 & b_1 c_2 + c_1 b_2 & b_1 c_3 + c_1 b_3 \\ b_2 c_1 + c_2 b_1 & b_2 c_2 + c_2 b_2 & b_2 c_3 + c_2 b_3 \\ b_3 c_1 + c_3 b_1 & b_3 c_2 + c_3 b_2 & b_3 c_3 + c_3 b_3 \end{bmatrix} \end{array} \right\}
 \tag{数式 5-68}$$

$$\{Q_j\}^e = -\int_{L^e} W_i^e N_j (Q_{xj} + Q_{yj}) dL = -\frac{(L(Q_{xj} + Q_{yj}))_j}{2} \quad (\text{数式 5-69})$$

(節点 j に係わる辺を横切る 1/2 の流量が節点流量として換算される)



節点 3 に係る流量 = 赤印流量 = $1/2 (Q_{s1} + Q_{s2}) = 1/2 (dQ_{s1} + dQ_{s2}) * L$

$$\{D_j\}^e = \int_{R^e} Q W_i^e dR^e = \frac{Q\Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{数式 5-70})$$

(各要素への流入(流出)量は3等分される.)

$$[F_{ij}]^e = \int_{R^e} S N_j^e W_i^e dR^e = \frac{\bar{S}\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{数式 5-71})$$

ここで、差分法で用いられるように貯留項(時間微分項の係数項)は対角項に集約される形にするため、lumped matrix 法を用いると次式となる。

$$[F_{ij}]^e = \frac{\bar{S}\Delta}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{\bar{S}\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{数式 5-72})$$

2) 時間項の取り扱いと非線形特性の考慮

解くべきマトリクス方程式は以下のとおりであるが、時間項については有限要素法によらず差分法により計算する。計算ステップとしては、最初に仮定水位を設定し、これによってマトリクス方程

式を解き，収束条件に至らなければ，水位を再設定し再度マトリクス方程式を解くというルーチンを追う．

$$[A_{nm}]\{h_m\} + [F_{nm}]\left\{\frac{dh_m}{dt}\right\} = \{Q_n\} - \{D_n\} \quad (\text{数式 5-73})$$

扱い易くするために，上式右辺ベクトル項を一まとめにする．

$$[A_{nm}]\{h_m\} + [F_{nm}]\left\{\frac{dh_m}{dt}\right\} = \{C_n\} \quad (\text{数式 5-74})$$

差分法における一般式は差分重みパラメータ ω を用いると次式で表される．

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\Delta t} [F_{nm}]^{k+1} + \omega [A_{nm}]^{k+1} \right\} \{h_m\}^{k+1} \\ & = \left\{ \frac{1}{\Delta t} [F_{nm}]^k - (1-\omega)[A_{nm}]^k \right\} \{h_m\}^k + \left\{ (1-\omega)\{C_n\}^k + \omega\{C_n\}^{k+1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{数式 5-75})$$

ここで， ω は $0 \leq \omega \leq 1$ の範囲にある実数をとることができ，特に以下が知られている．

$\omega = 1$: 後退差分

$\omega = 1/2$: 中央差分

また， $[A]$ ， $[F]$ ， $\{C\}$ を確定するためには(数式 5-75)にみられるように， h^{k+1} が必要である．そこで，推定による h^{k+1} からこれらの係数マトリクスや定数ベクトル項を求め，収束計算を行なう．

しかし，プログラム GWAP では，(数式 5-75)の全ての係数マトリクス($[A]$ ， $[F]$)や定数ベクトル($\{C\}$)項にステップ $(k+1/2)$ での値を用いる．この場合も同様に $h^{k+1/2}$ を推定するが，推定時間間隔を t から $t/2$ にすることになり，推定精度が幾分向上し，結果的に収束性が増すことになる．

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\Delta t} [F_{nm}]^{k+1/2} + \omega [A_{nm}]^{k+1/2} \right\} \{h_m\}^{k+1} \\ & = \left\{ \frac{1}{\Delta t} [F_{nm}]^{k+1/2} - (1-\omega)[A_{nm}]^{k+1/2} \right\} \{h_m\}^k + \{C_n\}^{k+1/2} \end{aligned} \quad (\text{数式 5-76})$$

また， $h^{k+1/2}$ の推定には以下の公式が用いられる．

各タイムステップでの最初の繰り返し計算には次式を用いる．

$$\begin{aligned} \frac{h_m^{k+1/2} - h_m^k}{\frac{\Delta t_k}{2}} &= \frac{h_m^k - h_m^{k-1}}{\Delta t^{k-1}} \\ \therefore h_m^{k+1/2} &= h_m^k + \frac{\Delta t^k}{2\Delta t^{k-1}} (h_m^k - h_m^{k-1}) \end{aligned} \quad (\text{数式 5-77})$$

ここで， $t^k = t^{k+1} - t^k$

各繰り返し過程に入ってから次式を用いる．

$$h_m^{k+1/2} = \frac{1}{2}(h_m^k + h_m^{k+1}) \quad (\text{数式 5-78})$$

なお、後退差分の場合は以下の式を用いる。

$$\frac{h_m^{k+1} - h_m^k}{\Delta t^k} = \frac{h_m^k - h_m^{k-1}}{\Delta t^{k-1}} \quad (\text{数式 5-79})$$

$$\therefore h_m^{k+1} = h_m^k + \frac{\Delta t^k}{\Delta t^{k-1}}(h_m^k - h_m^{k-1}) \quad (\text{数式 5-80})$$

6. 地上部水収支モデルと地下水解析モデルの結合

地上部水収支モデルである SHER モデルと地下水解析モデルである GWAP を結合し、水循環モデルの構築を図る（**図 6-1**）。

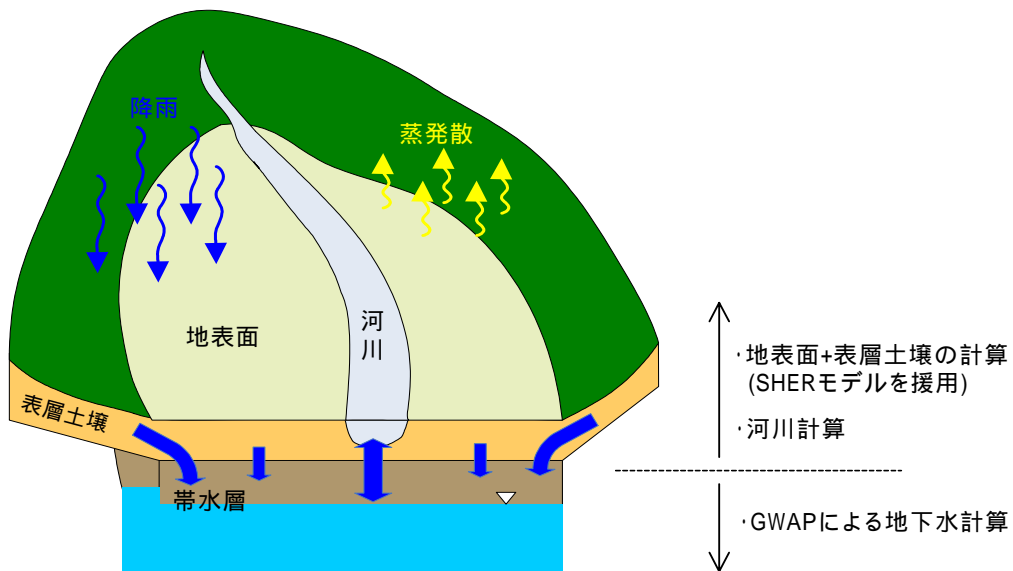


図 6-1 地表流モデルと地下水モデルの結合の概念

SHER モデルは一般的に集中型モデルとして扱われる。しかし、地下水への浸透が一点集中的に行われると、GWAP の有限要素格子単位の計算を有効に活用できない。このため、GWAP の有限要素格子単位の合わせて、地上部水収支モデルも格子単位の計算を行うものとした。地上部水収支計算の結果を地下水へと伝達する様子を**図 6-1**に示す。

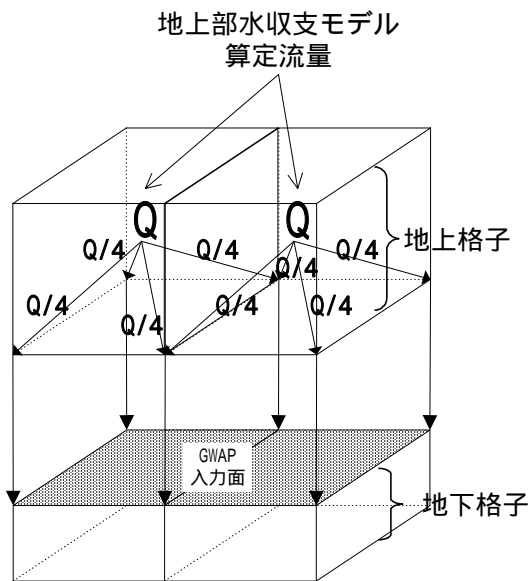


図 6-2 表流水モデルと地下水モデルの関係

地上部水収支モデルは、GWAP 地下格子の上に組み込まれ地上格子の役割を果たす。流域に降った雨は地上格子モデルでの一連の過程（ダム補給、取水、還元、蒸発散等）を経て、涵養水分が GWAP に入力される。本研究目的の背景には「水資源の有効利用」があり、洪水解析の併用は必ずしも必要ない。このため、計算時間の短縮化やデータ収集・蓄積の効率化の観点から日計算をベースにした水収支計算を行った。

地上部水収支モデルは、先に紹介したデータベースと融合したパッケージとするため、Excel ベースで開発を行った。このため、条件入力パソコンを利用する人であれば比較的身近なインターフェースを通して実行可能である。データベースと地上部水収支機能、そして、実行形式の GWAP との計算関係は図 6-3 のようになる。

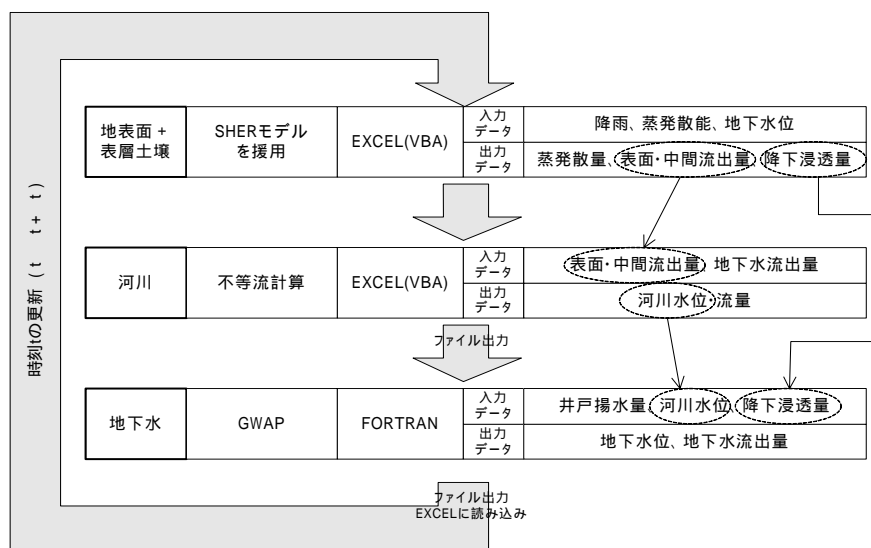


図 6-3 地上部水収支計算，GWAP の計算順序