

3.2 隅角部の応力算出手法の概要

3.2.1 概要

ここでは、奥村・石沢の方法以外に、FEM 解析と隅角部のモデル化に一定せん断流パネル要素を用いた解析手法について概要を示すとともに、これらによる隅角部応力の試算を行い、疲労設計に対する適用性について比較検討を行う。

3.2.2 解析手法の概要

(1) 奥村・石沢の方法

平面骨組解析より求められる断面力を用い、はりフランジと柱フランジそれぞれに対してせん断遅れの影響を考慮した垂直応力の補正係数を用いてせん断遅れの影響を含む応力を算出する手法である。

解析法の詳細は、本報告書の末尾に示す。

(2) FEM 解析

FEM 解析とは、無限の自由度を持つ連続体を、ある指定された有限個の未知量を含む部分領域あるいは要素の集合体を用いて近似して応力等を算出する解析手法である。任意の形状の物体を、単純な形状・性質の小部分（要素）に分割し、その1つ1つの要素の特性を数式化して近似的に表現し、これらが連続となるようにすべての方程式が成立する解を算出することで要素の挙動および全体の挙動を求めるものである（図 3.2.1）。ここでいう挙動とは、隅角部の応力算出のような場合には隅角部を構成する部材各部の変形や応力分布である。

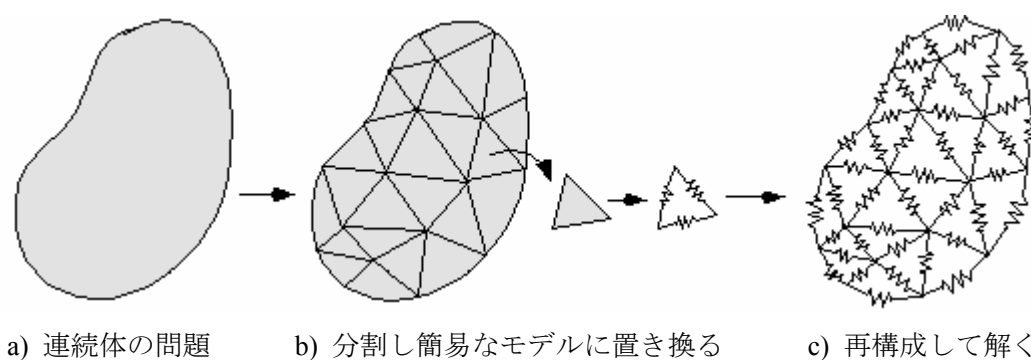


図-3.2.1 FEM 解析のモデル化の例

なお、FEM 解析では要素分割の細かさと要素にもたせる性質によって解析結果が異なり、特に局所的な応力の変化や微少な変形量を精度よく求めるためには要素分割を細密化する必要があり、それにつれて計算量が増大することとなる。

解析手法の詳細は参考文献などが多数存在するためここでは言及を省略する。

(3) 一定せん断流パネル要素を用いた解析手法

1) 概要

従来のはりの曲げ理論では Bernoulli-Euler の仮定のもとせん断変形の影響を無視しているため、このせん断変形の影響が大きい部材では精度良く応力を算出することができなくなる。そこで、このせん断変形の影響を考慮する 1 つの手法として一定せん断流パネルと呼ばれる要素を用いた解法がある。この一定せん断流パネル要素とは、せん断応力のみ抵抗する板要素とその外周に曲げにともなう垂直応力のみを負担するはり要素から構成される要素であり、板要素とはり要素の間に図-3.2.2 に示すような内力分布の関係がある。一定せん断流パネル要素を用いた解析手法（以下、「一定せん断流パネル解析」という）はこの要素を用いて対象部材をモデル化し解析を行う手法であり、図-3.2.3 に示すように対象とする板部材を縦横にパネル分割しせん断応力のみ抵抗する板要素に置き換え、その 4 辺にはその分担幅分の板の断面積をもつはり要素を取り付けてモデル化を行う。なお、本解析手法は航空分野などの薄板のみまたは薄板と補剛材で構成される構造の解析では既に実績もある方法であり、一定せん断流パネルとはり要素間にせん断流という要素力を導入し、このせん断流を未知数として応力法で行われてきた。ただし、変位法における使用例は少ない。

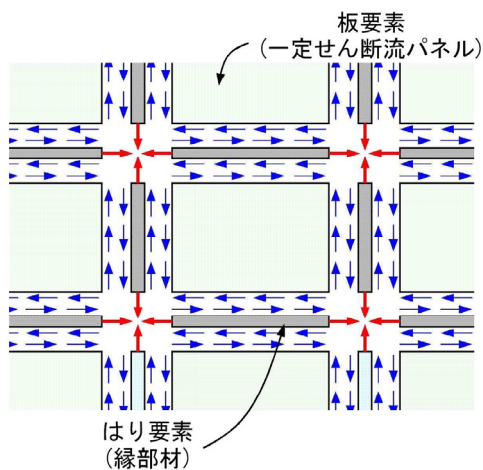


図-3.2.2 内力分布図

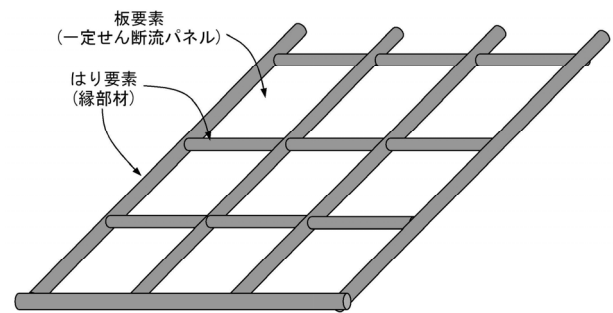


図-3.2.3 一定せん断流パネル板のモデル

なお、隅角部の解析に一定せん断流パネル要素を用いた理由は、以下の利点に着目したことによる。

- ・部材軸力が部材間で線形に変化するため、少ない要素分割でも精度よくせん断変形を評価できる。
- ・せん断遅れの影響を考慮した応力を直接的に算出することができる。
- ・縁部材の剛性に板曲げ剛性を考慮することで、板曲げ応力を直接的に算出することができる。

以下に、鋼製橋脚隅角部の応力性状などの特徴を踏まえ、一定せん断流パネル解析の概要について文献 5) ～7) などを参考に記載する。

2) 一定せん断流パネル要素の概念

以下に、一定せん断流パネル要素の概念について説明する。

① はりの曲げとせん断

変形前にまっすぐであったはり、図-3.2.4 に示すように曲げモーメントを受けた純曲げの状態では円弧状に曲がる。このとき軸線に垂直な平面は変形後も軸線に垂直な平面になると考えられる (Bernoulli-Euler の仮定)。

この仮定に基づき、中立軸から y 点での曲げ応力度 σ は式(3.2.1) に示すはりの曲げ公式が導かれている。

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (3.2.1)$$

ここで、 I は中立軸回りの断面 2 次モーメントである。

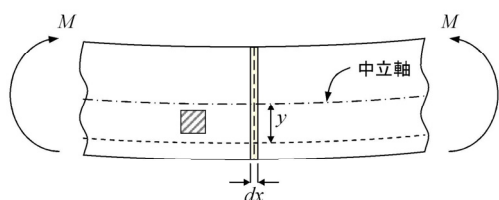


図-3.2.4 はりの曲げ

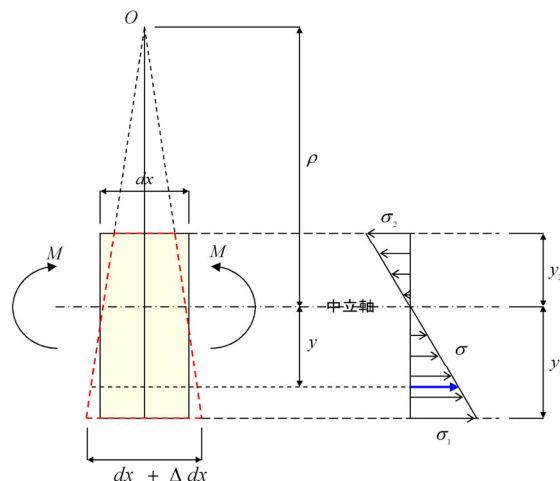


図-3.2.5 微小区間の断面状態

以上のように、はりの曲げ応力は曲げに伴うせん断変形の影響を無視して求めている。しかし、実際のはりでは直断面に沿って作用するせん断力のために、この断面上で大きさが変化するせん断応力 τ_{xy} を生じる。また、図-3.2.4 示すような微小長方形要素に働くせん断応力には、図-3.2.6 に示すようにせん断応力の共役性より式(3.2.2)の関係がある。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.2.2)$$

いま、図-3.2.7 に示すように、はりの断面は対象軸をもち、この対象軸と軸線とで決定される平面内において、はりの曲げが起こるとする。はりにおいては軸線方向に Δx だけ離れた 2 つの直断面を考える。この両断面間に外力はないとし、内力としてせん断力 V 、 $V + \Delta V$ および曲げモーメント M 、 $M + \Delta M$ が働くとする。このとき、図-3.2.7 の右側断面図心まわりのモーメントのつり合いより、

$$M + \Delta M = M + V \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta M = V \cdot \Delta x \quad (3.2.3)$$

となる。式(3.2.1)よりこの要素の左側、右側の曲げ応力は、

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad \sigma + \Delta \sigma = \frac{M}{I} y + \frac{M + \Delta M}{I} y \quad (3.2.4)$$

となる。これらの曲げ応力は、図-3.2.8(a) の断面を例にとれば、図-3.2.8(b) のように働き、 y 座標が y_1 なる任意点でこの要素を水平に切断して、図-3.2.8(c) のような部分の考えると、左右の断面の曲げ応力の

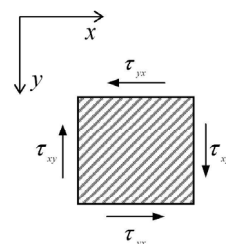


図-3.2.6 せん断応力の共役性

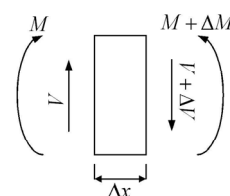


図-3.2.7 微小区間の内力図

差によって生じる力は、この水平断面内のせん断応力とつり合わされ、左右断面の垂直応力の相殺する部分を除いて、残った部分と水平断面上のせん断応力のつり合いを考えると図-3.2.8(d)となる。これらの水平力のつり合いを考えると図-3.2.8(b), (d)より、

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta M}{I} y \quad (3.2.5)$$

であり、これは要素の上面に作用する水平せん断力とつり合わなければならない。

$$\tau_{yx} \cdot \Delta x \cdot b = \int_{y_1}^{y_2} \Delta\sigma \cdot dA = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\Delta M}{I} y \right) dA = \frac{\Delta M}{I} \int_{y_1}^{y_2} y dA = \frac{V}{I \cdot b} \int_{y_1}^{y_2} y dA \quad (3.2.6)$$

故に、はりには式(3.2.7)に示すせん断応力 τ_{yx} が作用する。なお、 $G = \int_{y_1}^{y_2} y dA$ 、 $Q = \Delta M / \Delta x$ である。

$$\tau_{yx} = \frac{Q \cdot G}{I \cdot b} \quad (3.2.7)$$

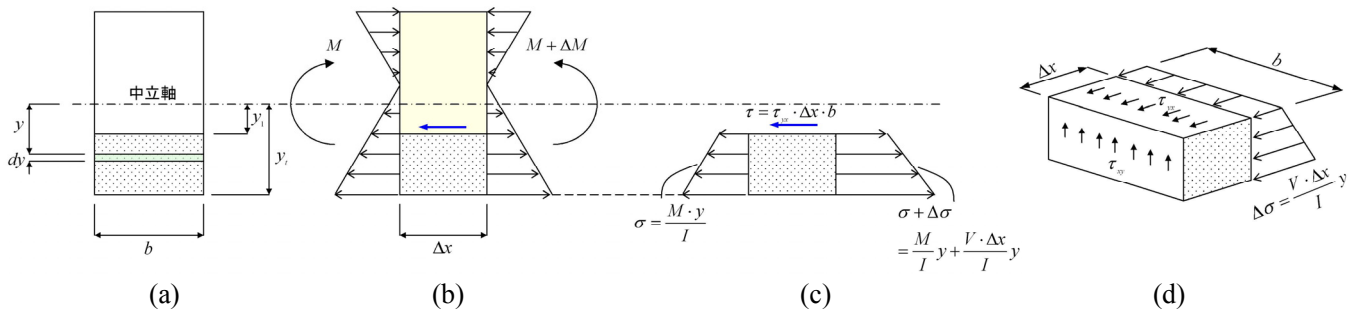


図-3.2.8 微小区間における応力状態図

② 一定せん断流パネル要素の概念

前項に示したように、はりの曲げ理論では Bernoulli-Euler の仮定のもとせん断変形の影響を無視したものであるが、実際のはりには曲げによるせん断が生じる。そのため、このせん断の影響が大きくなると Bernoulli-Euler の仮定が成立しないため、精度良く応力を算出することができなくなる。

ここでは、図-3.2.9 のような薄板の片持ちはりを例に考える。この片持ちはりを、図-3.2.10 に示すように曲げのみに抵抗するはり要素とせん断のみに抵抗する板要素によりモデル化を行う。

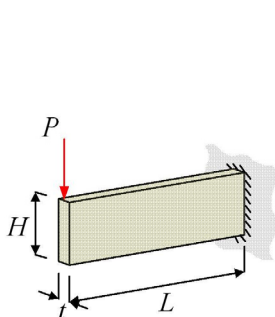


図-3.2.9 検討構造図

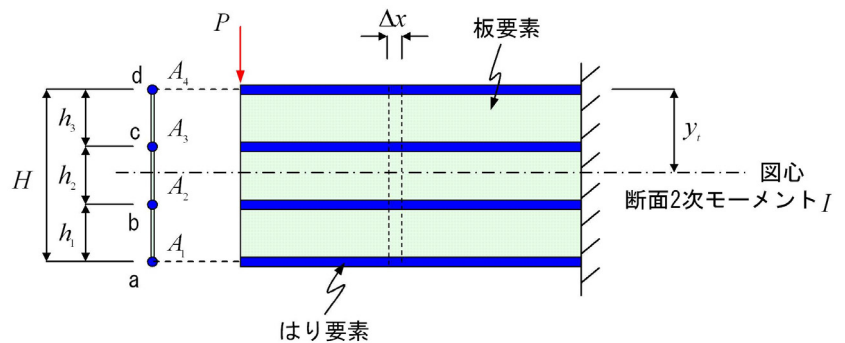


図-3.2.10 構造解析モデル図

ここで、図-3.2.10 に破線で示されるはり軸線方向に Δx だけ離れた 2 つの直断面で切り出した図-3.2.11 を考え、図-3.2.7 と同様にこの両断面間に外力はないとし、内力としてせん断力 V 、 $V + \Delta V$ および曲げモーメント M 、 $M + \Delta M$ が働くとする。このとき、図-3.2.8(d) に示したようにはりの微小区間における応力状態の関係から、板要素には微小区間前後の曲げ応力の差 ($V \cdot \Delta x \cdot y / I$) が図-3.2.11 のようにせん断応力 τ_{xy} として作用する。さらに、このせん断応力は図-3.2.11 に示すようにはり要素に軸応力として伝達されるので、はり要素の両端に加わる軸応力の差は板要素に作用するせん断応力と等しく $V \cdot \Delta x \cdot y / I$ として与えられる。また、図心から y_i の離れたはり要素の断面積を A_i とすると、図-3.2.11 に示すはり要素両端の軸力差 ΔN_i は、式(3.2.9)のように与えられる。

$$\Delta N_i = V \cdot \Delta x \cdot y_i \cdot A_i / I \quad (3.2.9)$$

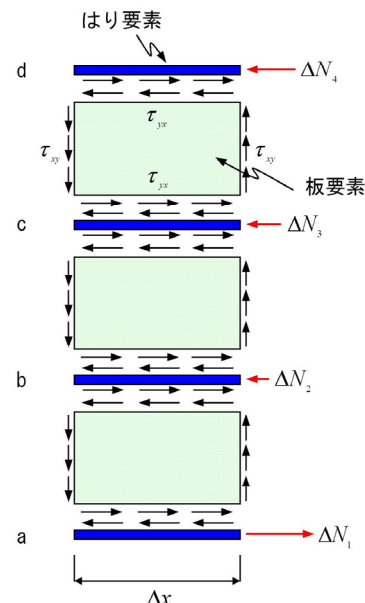


図-3.2.11 はりの内力分布図

以上のように、せん断応力のみ抵抗する板要素とその周囲に取り付けられたはり要素により任意に分割し、板要素に生じたせん断応力と等価な軸応力がはり要素に伝達すると考え、せん断の影響を考慮している。この板要素とはり要素により構成される要素が一定せん断流パネル要素である。

3) せん断遅れの影響

初等はり理論においては、はりの断面は曲げを受けた後も平面のままであり、軸線垂直であるという Bernoulli-Euler の仮定がなされる。しかし、薄板構造では、この初等はり理論により得られるものと違いを生じる。これは必ずしもせん断変形が省略可能でないことによる。図-3.2.12 のような薄板の箱断面の片持ちはりでは、応力分布は図中に示されるような性状を示し、一様な分布とはならない。この分布性状の違いがせん断遅れであり、この影響を考慮する必要がある。一定せん断流パネル解析では、このせん断遅れの影響を考慮した応力を直接的に算出できる特徴がある。

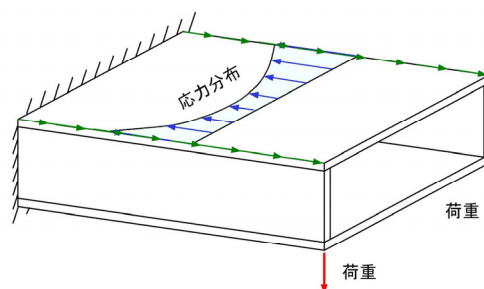


図-3.2.12 薄板構造における応力状態

ここで、図-3.2.13(a) に示されるようにはり要素と板要素によりモデル化された薄板を考える。断面 $x = 0$ で中央のはり要素に引張力 P を与え、両端のはり要素に圧縮力 $P/2$ が加わるとき、板要素のせん断変形が生じる。中央のはり要素における軸力 P は距離 x の関数である。ここで、長さ dx へだった 2 断面の軸力は dP だけの差があるとする。板要素のせん断変形は図-3.2.13(b) のようで、せん断ひずみは座標 x の点で γ 、 $x + dx$ 点で $\gamma + d\gamma$ で、それらの差は $d\gamma$ である。

図-3.2.14 のように中央のはり要素近傍に着目し、この部分におけるつり合いを考えると、せん断応力 τ は、板要素厚を t として以下ようになる。

$$dP = -2 \cdot \tau \cdot t \cdot dx \quad (3.2.10)$$

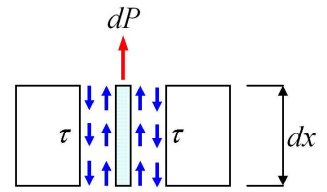
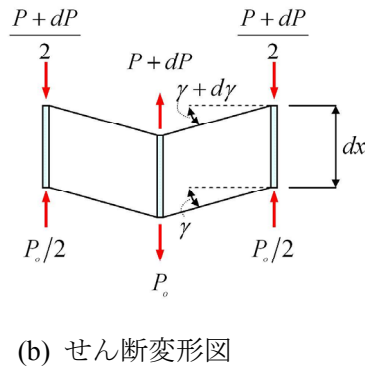
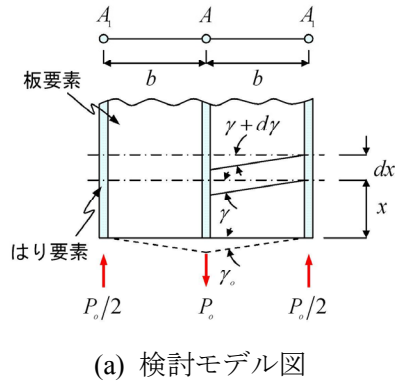


図-3.2.13 検討モデル図

図-3.2.14 つり合い図

また、せん断応力とせん断ひずみの関係は、せん断弾性係数を G として、

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{3.2.11}$$

である。せん断ひずみ γ は、はり要素の軸方向の伸縮量により求められる。せん断ひずみ γ の変化量 $d\gamma$ は、近接した 2 断面のせん断ひずみ γ の相対値であるので、一方の断面におけるせん断ひずみ γ が 0 とし、もう一方の断面はせん断ひずみは $d\gamma$ であると考えても相対値に変わりはない。そこで、便宜上、図-3.2.15 のような場合を考える。 $\overline{BB_1}$ と $\overline{B'B'_1}$ の相対角 $d\gamma$ は、

$$d\gamma = -\frac{1}{b} \left(\frac{P}{A \cdot E} + \frac{P}{2 \cdot A_1 \cdot E} \right) dx \tag{3.2.12}$$

ただし、 A 、 A_1 ははり要素の断面積である。式(3.2.10) の両辺を dx で割って、式(3.2.11) を代入すると、

$$\frac{dP}{dx} = -2 \cdot \tau \cdot t = -2 \cdot G \cdot \gamma \cdot t \tag{3.2.13}$$

式(3.2.13)を x について微分し、式(3.2.12) より求めた $d\gamma/dx$ を代入すると、

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = -2 \cdot t \cdot G \frac{d\gamma}{dx} = \frac{2 \cdot t \cdot G}{b \cdot E} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{2 \cdot A_1} \right) P \tag{3.2.14}$$

ここで、

$$k^2 = \frac{2 \cdot t \cdot G}{b \cdot E} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{2 \cdot A_1} \right) \tag{3.2.15}$$

とおけば、

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = k^2 \cdot P \tag{3.2.16}$$

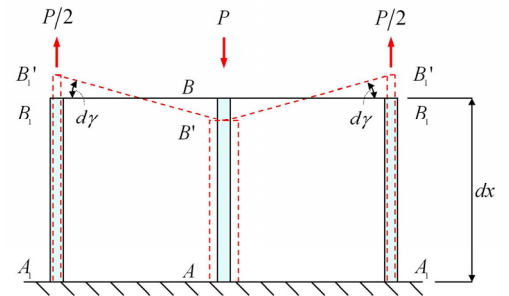


図-3.2.15 一端固定の変形図

となる。この微分方程式の一般解は、

$$P = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx} \tag{3.2.17}$$

で与えられる。ただし、 C_1 、 C_2 は積分定数である。荷重 P は x の大きい値において 0 に近づくことは、図-3.2.13 と Saint-Venant の原理より明白である。したがって、 $x = \infty$ で $P = 0$ であり、 $C_1 = 0$ となる。また、荷重端では $x = 0$ で $P = P_0$ であるので、式(3.2.17) より $C_2 = P_0$ である。したがって、これらを式(3.2.17) に代入すると、式(3.2.18) を得る。これがはり要素の軸力変化を与える式である。

$$P = P_0 \cdot e^{-kx} \tag{3.2.18}$$

式(3.2.18)を微分して、

$$\frac{dP}{dx} = -k \cdot P_0 \cdot e^{-kx} \quad (3.2.19)$$

となるが、これを式(3.2.10)を変形した $dP/dx = -2 \cdot \tau \cdot t$ と等置して、 dP/dx を消去することにより式(3.2.20)を得る。

$$\tau = -\frac{P_0 \cdot k}{2 \cdot t} e^{-kx} \quad (3.2.20)$$

これは、板要素におけるせん断応力の変化を表わす式である。 $x=0$ における力 P_0 の着力点の変位 δ は、図-3.2.13(a)より $b \cdot \gamma_0$ で与えられる。ただし、 γ_0 は $x=0$ におけるせん断ひずみ γ である。したがって、 $x=0$ におけるせん断応力 τ を τ_0 とすれば、

$$\delta = b \cdot \gamma_0 = \frac{\tau_0 \cdot b}{G} = \frac{P_0 \cdot k \cdot b}{2 \cdot t \cdot G} \quad (3.2.21)$$

となり着力点 P_0 の変位 δ がわかる。したがって、 P_0 が決定されれば、式(3.2.18)によりはり要素の軸方向変位や軸方向力 P などが求められる。この式(3.2.21)から板のせん断弾性係数が無限大でない場合($G \neq \infty$)、はり要素には板のせん断変形の影響を受けることが分かる。これがせん断遅れと呼ばれるものであり、板厚 t が薄いほどその影響が大きいことも分かる。

以上のように、薄板構造において一定せん断流パネル要素を用いることで、直接的にせん断遅れの影響を考慮して応力などを算出できることがわかる。

4) 剛性マトリックスの誘導

以下に、一定せん断流パネル要素における剛性マトリックスの誘導の概要を説明する。

① 一定せん断流パネル要素の剛性マトリックス

一定せん断流パネル要素は長方形で一定の厚さとする。板に働く力は、図-3.2.16に示す。ここに応力法では、せん断流 F_1 が要素力として使用されるが、ここで検討する変位法では、せん断流 S_1, S_2, S_3, S_4 を要素力として選択する。

板の応力とひずみは、板厚を t 、せん断弾性係数を G として式(3.2.22)のように求められる。

$$\sigma_{xy} = F_1/t, \varepsilon_{xy} = F_1/Gt \quad (3.2.22)$$

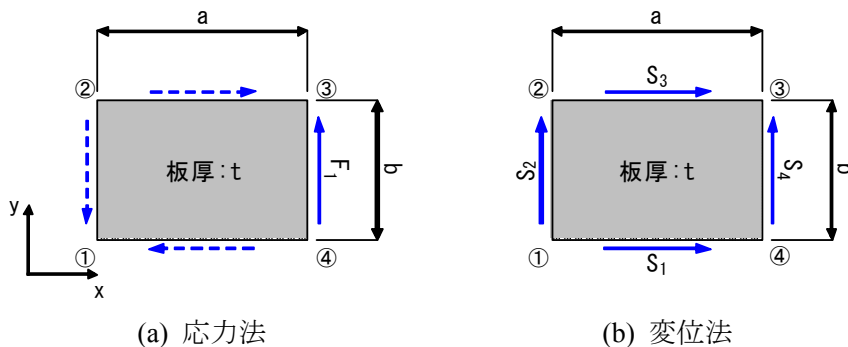


図-3.2.16 一定せん断流パネルにおける要素力

全変形に対するコンプリメンタリひずみエネルギー U_d^* は、式(3.2.23) から得られる。なお、 a 、 b はパネル寸法を表す。

$$U_d^* = \frac{1}{2} \iiint (F_1^2 / Gt^2) dx dy dz = (ab/2Gt) / F_1^2 \quad (3.2.23)$$

Castigliano の第2 定理により、パネルの相対変位 v は式(3.2.24) ように与えられる。

$$v = \partial U_d^* / \partial F_1 = (a \cdot b / G \cdot t) F_1 = f \cdot F_1 \quad (3.2.24)$$

ここで、 $f = a \cdot b / G \cdot t$ は、一定せん断流パネルのたわみ性マトリックスである。また、せん断流 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 に対するつりあい方程式は、式(3.2.25) のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} S_4 = 0 \quad (3.2.25)$$

$\{S_1 \ S_2 \ S_3\}$ の係数の 3×3 のマトリックスの逆マトリックスを前から乗ずると、

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} S_4 = 0 \quad (3.2.26)$$

となる。ここで変位法のつり合い関係（要素力： $S = \{S_w, S_u\}$ とした場合、それ自身つり合っていないければならない $[S_w + T \cdot S_u = 0, T : \text{変換マトリックス}]$ より、 $S_w = \{S_1 \ S_2 \ S_3\}$ 、 $S_u = S_4$ とすれば変換マトリックス T は式(3.2.27) のように与えられる。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2.27)$$

ここで、 $N = \begin{bmatrix} T & -1 \end{bmatrix}$ とすると、たわみ性マトリックスとの関係より一定せん断流パネルの剛性マトリックス k は式(3.2.28) で表される。

$$k = N^T f^{-1} N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{Gt}{ab} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.28)$$

② 縁部材の剛性マトリックス

軸力要素に対する要素力の正方向を、図-3.2.17 に示す。要素における軸力 F は、式(3.2.29) のように与えられる。

$$F = -\{1 - (x/l)\} F_1 + (x/l) F_2 \quad (3.2.29)$$

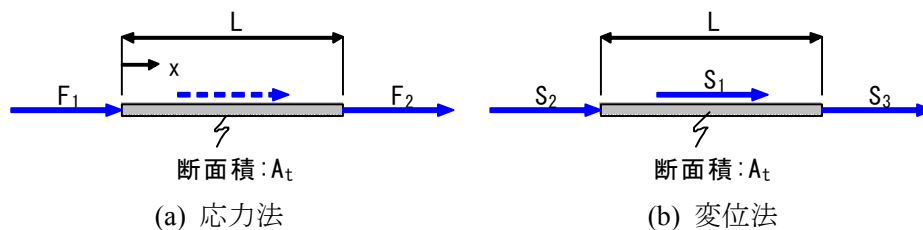


図-3.2.17 線形に変化する軸力を伝える部材の要素力

コンプリメンタリエネルギー U_d^* は、式(3.2.30) から得られる。

$$U_d^* = \frac{1}{2} \iint (F^2/EA^2) dx dA + \iint (F/A) \alpha T dx dA \quad (3.2.30)$$

ここで、 A は断面積、 E はヤング率である。式(3.2.30) を F_1 、 F_2 に関して微分すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \frac{l}{6EA} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha l}{6} \begin{bmatrix} -(2T_1 + T_2) \\ T_1 + 2T_2 \end{bmatrix} \\ &= fF + v_T \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

ここで、式(3.2.32) は要素のたわみ性である。

$$f = \frac{l}{6EA} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.2.32)$$

図-3.2.17 におけるせん断流 S_1 と集中力 S_2 、 S_3 に対するつりあい方程式は、式(3.2.33) のように与えられる。

$$S_1 \cdot l + S_2 + S_3 = 0 \quad \iff \quad S_1 + \begin{bmatrix} 1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.33)$$

となるので、①と同様に変位法におけるつり合い関係より、式(3.2.34) に示す変換マトリックス T が与えられる。

$$T = \begin{bmatrix} 1/l \\ 1/l \end{bmatrix} \quad (3.2.34)$$

また、 $N = [T \quad -1]$ として、式(3.2.35) にが得られる。

$$N = [T \quad -1] = \begin{bmatrix} 1/l & -1 & 0 \\ 1/l & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2.35)$$

したがって、たわみ性マトリックスとの関係より縁部材の剛性マトリックスは式(3.2.36)で表される。

$$\begin{aligned} k &= N^T f^{-1} N \\ &= \begin{bmatrix} 1/l & 1/l \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{2AE}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/l & -1 & 0 \\ 1/l & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{2AE}{l} \begin{bmatrix} 6/l^2 & -3/l & -3/l \\ -3/l & 2 & 1 \\ -3/l & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$